Feuille de TD 6 : Localisation

Plusieurs exercices de cette feuille sont inspirés du livre de Brendan Hassett (Algebraic Geometry) et du poly de Bernard Le Stum.

Exercice 1 (Idéaux maximaux)**.**

(a) Décrire les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$, de $k[X]$ où k est un corps, et d'un anneau principal A.

(b) Montrer que les idéaux de la forme (p, f) où p est un nombre premier et f un polynôme unitaire irréductible modulo p sont maximaux dans $\mathbb{Z}[x]$.

(c) Soit k un corps et $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in k^n$. Montrer à l'aide de l'application d'évaluation en $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ que l'idéal $(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \cdots, X_n - a_n)$ de $k[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ est maximal. (En fait, si k est algébriquement clos, le théorème des zéros de Hilbert permet de montrer que ce sont les seuls idéaux maximaux.)

Exercice 2 (Anneaux locaux)**.**

(a) On rappelle que si A est un anneau et I un idéal propre, puisque l'ensemble des idéaux propres de A contenant I est inductif (i.e. toute famille totalement ordonnée admet un élément maximal), il existe par le lemme de Zorn un idéal maximal contenant I. Montrer qu'un élément de A est inversible si et seulement si il n'appartient à aucun idéal maximal.

(b) Montrer que A admet un unique idéal maximal si et seulement si $A - A^\times$ est un idéal de A. (On dit alors que A est *local*. L'unique idéal maximal est alors $M = A - A^\times$.)

(c) Pour quels entiers naturels n, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il local ?

Exercice 3 (Partie multiplicative et localisation)**.** On rappelle qu'une partie d'un anneau est dite *multiplicative*, si elle contient 1 et si elle est stable par multiplication.

(a) Montrer que l'image et l'image réciproque d'une partie multiplicative par un morphisme d'anneaux est une partie multiplicative.

(b) Montrer que si I est un idéal de l'anneau A, $1 + I$ est une partie multiplicative de A.

(c) À quelle condition sur A le sous-ensemble des éléments non-nuls est-il une partie multiplicative ? Quelle est alors la localisation d'un tel anneau par rapport à la partie multiplicative des éléments non nuls ?

(d) Montrer que le localisé $S^{-1}A$ de l'anneau A par rapport à la partie multiplicative S est $\{[0_A]\}$ si et seulement si 0_A appartient à S.

(e) Montrer que les éléments de $S^{-1}A$ s'écrivent sous la forme $\frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}$ avec $(a, s) \in A \times S$ et l'application $\varphi : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto [(a, 1)]$.

(f) Montrer que si A est intègre et S une partie multiplicative de A qui ne contient pas 0, alors $S^{-1}A$ s'injecte dans le corps des fractions de A et l'application $\varphi : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto [(a, 1)]$ de A dans le localisé $S^{-1}A$ est injective.

(g) Montrer que les idéaux premiers de $S^{-1}A$ sont exactement les $S^{-1}P$, pour P idéal premier de A ne rencontrant pas S.

Exercice 4 (Localisation par rapport à un idéal premier)**.** Soit A un anneau intègre.

(a) Montrer que si P est un idéal premier de l'anneau A, alors $S := A - P$ est une partie multiplicative de A.
(b) Montrer que les éléments de S sont inversibles dans le localisé $S^{-1}A$ et que l'image de P dans le localisé $S^{-1}A$ engendre l'unique idéal maximal M.
(c) Montrer le corps résiduel $S^{-1}A/M$ est le corps des fractions de A/P.
(d) Soit $u : A \to B$ un morphisme d'anneaux et Q un idéal premier de B. Montrer que $P = u^{-1}(Q)$ est un idéal premier de A et que u se prolonge de manière unique en un morphisme d'anneaux locaux $u_P : A_P \to B_Q$.

Exercice 5 (Localisation par rapport à une famille de puissances)**.** Soit A un anneau intègre

(a) Montrer que si a est un élément non nilpotent d'un anneau A, alors l'ensemble S des puissances de a est une partie multiplicative de A qui ne contient pas 0.
(b) Quelle est la localisation $\mathbb{Z}_{10}$ de $\mathbb{Z}$ par rapport à la partie multiplicative des puissances de 10 ?
(c) Avec les notations de la première question, l'anneau localisé $S^{-1}A =: A_a$ est-il local ?

Exercice 6 (Hérédité par localisation)**.** (a) Montrer que le localisé $S^{-1}A$ d'un anneau principal par rapport à une partie multiplicative S reste principal.
(b) En déduire de $\mathbb{C}[X, Y]/(XY - 1)$ est principal.
(c) Montrer que le localisé $S^{-1}A$ d'un anneau factoriel par rapport à une partie multiplicative S reste factoriel. On montrera que les éléments premiers de $S^{-1}A$ sont les éléments premiers p de A tels que $(p) \cap S = \varnothing$.

Exercice 7 (Anneaux de valuation discrète)**.** Une *valuation discrète* sur un corps K est une application surjective $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ vérifiant

- $\forall f \in K, v(f) = \infty \iff f = 0$
- $\forall f, g \in K, v(fg) = v(f) + v(g)$.
- $\forall f, g \in K, v(f + g) \geqslant \min(v(f), v(g))$.

On dit que l est une *uniformisante* si $v(l) = 1$ et que $A := \{f \in K, v(f) \geqslant 0\}$ est l'anneau de valuation de K.

(a) Donner un exemple d'anneau de valuation discrète.
(b) Montrer que si v est une valuation discrète sur un corps K et x un nombre réel strictement plus grand que 1, l'application $|\ |_v := x^{-v}$ est une norme sur K.
(c) Montrer qu'un anneau de valuation discrète est un anneau local. On précisera l'idéal maximal M et le groupe des inversibles de A en termes de la valuation, puis en termes de la norme.
(d) Montrer que tout élément a de A s'écrit de la forme $a = ul^n$, avec $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.
(e) Montrer que $v(f) \geqslant n \iff f \in M^n$.
(f) Montrer qu'un anneau de valuation discrète est principal.

Exercice 8 (Résolution des indéterminations)**.** Soit k un corps. Soit $f : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^n(k)$ une application rationnelle donnée par $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (f_1/g, f_2/g, \cdots, f_n/g)$ où f_i et g sont dans $k[x_1, \cdots, x_n]$. On notera $U = \mathbb{A}^n(k) - V(g)$ le domaine de définition de f. On définit la variété algébrique affine $\mathbb{A}^n(k)_g$ par

$$\mathbb{A}^n(k)_g := \{(x_1, \cdots, x_n, z) \in \mathbb{A}^{n+1}(k)/zg(x) = 1.\}.$$

(a) Montrer que l'anneau $\frac{k[x,z]}{(zg(x)-1)}$ des fonctions régulières sur $\mathbb{A}^n(k)_g$ s'identifie au localisé de $k[x]$ le long de la partie multiplicative des puissances de g.
(b) Montrer qu'il existe deux applications régulières $\pi : \mathbb{A}^n(k)_g \to U \subset \mathbb{A}^n(k)$ et $F : \mathbb{A}^n(k)_g \to \mathbb{A}^n(k)$ telles que $F = f \circ \pi$.