Université de Rennes

Feuille de TD 5 : Elimination

Plusieurs exercices de cette feuille sont inspirés du livre de Brendan Hassett (Algebraic Geometry) et du poly de Bernard Le Stum.

Avec le résultant

Exercice 1. Soit k un corps algébriquement clos. On considère l'application de projection $\pi : \mathbb{A}^{n+1}(k) \to \mathbb{A}^n(k), (x, y) \mapsto x$. Ici, x est un n-uplet et y un 1-uplet. Soit F et G deux polynômes de $k[x, y]$. Considérés dans $(k[x])[y]$, on note $\deg_y F$ le degré de F en y, $A(x)$ et $B(x)$ les coefficients dominants de F et G et $R(x) = \mathrm{Res}\,_y(F, G)$. Soit $p \in \mathbb{A}^n(k)$ hors de $V(A, B)$.

(a) On suppose que $A(p) \neq 0$. On considère l'application d'évaluation

$$\begin{cases} ev_p : & k[x] & \to k \\ & P & \mapsto P(p) \end{cases}$$

Montrer que $R(p) = A(p)^{\deg_y G - \deg ev_p(G)} \mathrm{Res}\,_y(ev_p(F), ev_p(G))$.

(b) Montrer que $p \in \pi(V(F, G)) \iff p \in V(R)$.

(c) Pour quelles valeurs de $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, le système d'équations

$$\begin{cases} x_1^2 y + x_2^2 y = 1 \\ x_1 y^2 + x_2 y^2 = 1 \end{cases}$$

admet-il des solutions ? On pourra explicitement vérifier.

Par intersection d'idéaux

Exercice 2. Soit k un corps. On considère l'application de projection $\pi : \mathbb{A}^{a+b}(k) \to \mathbb{A}^b(k), (x, y) \mapsto y$. Ici, x est un a-uplet et y un b-uplet. On note $\pi^\star$ l'inclusion $k[y] \mapsto k[x, y]$. Soit V un sous ensemble algébrique de $\mathbb{A}^{a+b}(k)$ et $I = I(V)$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$I(\pi(V)) = I \cap k[y]$$
$$\overline{\pi(V)} = V(I \cap k[y])$$

où $I \cap k[y]$ désigne $(\pi^\star)^{-1}(I \cap \pi^\star k[y])$, soit l'idéal vu dans $k[y]$ des polynômes de I sans variables x.

(a) Dans le cas où k est infini et $V = V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2(k)$, l'image $\pi(V)$ est-elle un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^1(k)$?

(b) Montrer pour tout polynôme P de $k[y]$, $\pi^\star P$ s'annule sur V si et seulement si P s'annule sur $\pi(V)$. En déduire $I(\pi(V)) = I \cap k[y]$.

(c) Conclure.

Exercice 3. Soit k un corps. Un ordre monomial sur $k[x, y]$ est dit *ordre d'élimination de* x si tout polynôme de $k[x, y]$ à coefficient dominant dans $k[y]$ est entièrement dans $k[y]$. Ici, x est un a-uplet et y un b-uplet.

(a) L'ordre lexicographique $x_1 > x_2 > \cdots > x_a > y_1 > \cdots > y_b$ est-il un ordre d'élimination pour x ou pour y ?

(b) Soit $>$ un ordre monomial sur $k[x, y]$ d'élimination pour x. Soit I un idéal de $k[x, y]$ et $J := I \cap k[y]$. Montrer que les éléments $f_{r+1}, \ldots, f_N$ d'une base de Gröbner $(f_1, \cdots, f_N)$ de I sans variable x forment une base de Gröbner de J.

Exercice 4. Soit k un corps. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de $a \in k$ telles que le système

$$\begin{cases} x + y &= a \\ x^2 + y^2 &= a^3 \\ x^3 + y^3 &= a^5 \end{cases}$$

admet une solution $(x, y) \in k^2$.

(a) Soit Z le sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^3(k)$ défini par les équations

$$\begin{cases} x + y &= z \\ x^2 + y^2 &= z^3 \\ x^3 + y^3 &= z^5 \end{cases}$$

et $\pi : \mathbb{A}^3(k) \to \mathbb{A}^1(k)$, $(x, y, z) \mapsto z$. Déterminer un système d'équations pour $\overline{\pi(Z)}$. *On pourra admettre qu'une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique* $x > y > z$ *de l'idéal de* Z *est* $(x + y - z, 2y^2 - 2yz - z^3 + z^2, 2z^5 - 3z^4 + z^3)$.

(b) Dans le cas où $k = \mathbb{C}$, en déduire les valeurs de a pour lesquelles le système admet une solution.

Exercice 5. Soit k un corps. Soit $V \subset \mathbb{A}^a(k)$ et $W \subset \mathbb{A}^b(k)$ deux ensembles algébriques. Soit $I = I(V) \subset k[x]$ et $J = I(W) \subset k[y]$. Ici, x est un a-uplet et y un b-uplet. Le but de l'exercice est d'obtenir des équations de la clôture de Zariski de l'image de l'application

$$\begin{cases} F : & V \to & W, \\ & x \mapsto & (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_b(x)) \end{cases}$$

où les f_i sont des polynômes de $k[x]$.

(a) À quelles conditions sur les f_i, l'application F est-elle bien définie ?

(b) Montrer que le graphe $gr(F)$ de F est un fermé de Zariski de $\mathbb{A}^{a+b}(k)$ dont on précisera des équations. On précisera aussi l'idéal $L = I(gr(F))$.

(c) Déterminer l'idéal $I(F(V))$ des fonctions nulles sur l'image de F.