Feuille de TD 4 : Variétés affines

Un rappel

Exercice 1. Soit P et Q deux polynômes de l'anneau factoriel $\mathbb{C}[X,Y]$ sans facteurs communs.

(a) En utilisant l'existence d'un polynôme non nul D de $\mathbb{C}[X]$ et de polynômes U, V de $\mathbb{C}[X,Y]$ tels que $D = UP + VQ$, montrer que $\mathbb{C}[X,Y]/(P,Q)$ est de dimension finie.

(b) Retrouver que l'ensemble $V(P,Q) := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2, P(x,y) = Q(x,y) = 0\}$ est un ensemble fini.

Idéaux et variétés

Exercice 2. Soit k un corps.

(a) Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{A}^n(k)$ et x un point de $\mathbb{A}^n(k) - E$. Existe-t-il un polynôme F de $k[X_1, \cdots, X_n]$ tel que $F_{|E} = 0$ et $F(x) = 1$?

(b) Soit V un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^n(k)$ et x un point de $\mathbb{A}^n(k) - V$. Existe-t-il un polynôme F de $k[X_1, \cdots, X_n]$ tel que $F_{|V} = 0$ et $F(x) = 1$?

(c) Soit V un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^n(k)$. L'ensemble V est-il une intersection finie d'hypersurfaces de $\mathbb{A}^n(k)$? *Une hypersurface de $\mathbb{A}^n(k)$ est le lieu des zéros d'un polynôme non constant de $k[X_1, \cdots, X_n]$.*

Exercice 3. (a) À l'aide de division euclidienne, déterminer des générateurs l'idéal $I(S)$ de $\mathbb{C}[X,Y]$ des polynômes nuls sur $S = \{(1,2)\} \subset \mathbb{C}^2$.

(b) Déterminer des générateurs l'idéal $I(T)$ de $\mathbb{C}[X,Y]$ des polynômes nuls sur $T = \{(1,2),(3,4)\} \subset \mathbb{C}^2$.

Exercice 4. Soit I_1 et I_2 deux idéaux de $k[x_1, \cdots, x_n]$. Vérifier que

$$V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2).$$

Exercice 5. Soit k un corps.

(a) Montrer que l'image de l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{A}^1(k) & \to & \mathbb{A}^3(k) \\ t & \mapsto & (t, t^2, t^3) \end{array} \right.$$

est incluse dans l'ensemble $D := \{(x_1, x_2, x_3) \in k^3, x_1^2 = x_2 \text{ et } x_1 x_2 = x_3\}$.

(b) Montrer que l'image de l'application φ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^3(k)$.

Exercice 6. Déterminer un système de générateurs pour l'idéal de la réunion $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$ des axes de coordonnées canoniques dans $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. i.e. $\ell_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_2 = x_3 = 0\}$.

Topologie de Zariski

Exercice 7. Soit k un corps infini.

(a) La topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n(k)$ est-elle séparée ?

(b) Tout ouvert de Zariski est-il une réunion finie de complémentaires d'hypersurfaces ?

Exercice 8. (a) Toute fonction continue pour la topologie métrique sur $\mathbb{C}^n$, nulle sur un sous-ensemble E de $\mathbb{C}^n$ est-elle nulle sur l'adhérence de Zariski de E ?

(b) Toute fonction polynômiale sur $\mathbb{C}^n$, nulle sur un sous-ensemble E de $\mathbb{C}^n$ est-elle nulle sur l'adhérence de E pour la topologie métrique ?

(c) Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$. Comparer pour l'inclusion E, l'adhérence $\overline{E}^{met}$ de E pour la topologie métrique et l'adhérence $\overline{E}^{Zar}$ de E pour la topologie de Zariski.

Exercice 9. (a) Déterminer à l'aide de générateurs l'idéal $I(E)$ des polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$ nuls sur $E = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2, \exists n \in \mathbb{N}, (x,y) = (n^2, n^3)\}$. *Si $P(X,Y)$ est dans $I(E)$, on pourra effectuer une division euclidienne de P par le polynôme unitaire $Y^2 - X^3$ dans $k[X][Y]$.*

(b) Déterminer l'adhérence de Zariski $\overline{X}$ de X.

Exercice 10. Soit n un entier supérieur à 3.

(a) Le sous ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est-il un fermé de Zariski de $M_n(\mathbb{R})$?

(b) Le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{C})$ des matrices inversibles est-il un ouvert de Zariski de l'espace affine $M_n(\mathbb{C})$.

(c) Soit $r \leqslant R$ deux entiers naturels. Montrer que toute matrice de rang r est dans l'adhérence de Zariski du sous-ensemble de $M_n(\mathbb{C})$ des matrices de rang R.

(d) Le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{C})$ des matrices de rang $n-2$ est-il un fermé de Zariski de l'espace affine $M_n(\mathbb{C})$.

(e) Si non, déterminer son adhérence de Zariski.

Applications polynômiales, applications rationnelles

Exercice 11. Soit k un corps.

(a) L'application de multiplication $\left\{ \begin{array}{ccc} M_n(k) \times M_n(k) & \to & M_n(k) \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array} \right.$ est-elle une application polynômiale ?

(b) L'ensemble $\{(M,t) \in M_n(k) \times k / t \det M = 1\}$ est-il un sous-ensemble algébrique de $M_n(k) \times k$. On le notera

$$GL_n(k) := \{(M,t) \in M_n(k) \times k / t \det M = 1\}.$$

(c) La multiplication dans $GL_n(k)$ est-elle polynômiale ?

(d) L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} GL_n(k) & \to & GL_n(k) \\ (A,t) & \mapsto & (A^{-1}, t^{-1}) \end{array} \right.$ est-elle une application polynômiale ?

Exercice 12. Soit k un corps.

(a) Soit $P \in k[X]$. La projection

$$\left\{ \begin{array}{ccc} V(Y - P(X)) & \to & \mathbb{A}^1(k) \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array} \right.$$

est-elle une application polynômiale ? Déterminer son image. Est-elle un isomorphisme ?

(b) L'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1(k) & \to & \mathbb{A}^2(k) \\ t & \mapsto & (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \end{array} \right.$$

est-elle polynômiale ? Déterminer son image. Est-elle un isomorphisme sur son image ?