Université de Rennes

Algèbre commutative-Géométrie algébrique

Feuille de TD 3 : Bases de Gröbner

Plusieurs exercices de cette feuille sont inspirés du livre de Brendan Hassett (Algebraic Geometry) et du poly de Bernard Le Stum.

Proches du cours

Exercice 1. Soit K un corps. Soit $I =< x^{I(1)}, \cdots, x^{I(r)} >$ un idéal monomial de $K[x_1, \cdots, x_n]$. Soit $P = \sum c_I x^I$ un polynôme de I. Montrer que chaque x^I tel que $c_I \neq 0$ est divisible par l'un des $x^{I(j)}$.

Exercice 2. Lister dans l'ordre pour les ordres lex, grlex et grinvlex les monômes en trois variables X, Y et Z (avec $X > Y > Z$) jusqu'au degré total 3 inclus.

Exercice 3. La base $(x_1 - x_2^{37}, x_1 - x_2^{38})$ de l'idéal $< x_1 - x_2^{37}, x_1 - x_2^{38} >$ est-elle une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique ?

Exercice 4. (a) En utilisant le critère des S-polynômes, dire si la famille $(X + Z, Y - Z)$ est une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique de l'idéal I de $K[X, Y, Z]$ qu'elle engendre.

(b) Déterminer si le polynôme $X^2 + Y^2 + Z^2$ appartient à I.

(c) Même question avec le polynôme $X^2 + 2XY - Y^2 + 2YZ$.

Exercice 5. Le polynôme $f = 2X^2Y^2 - X^2 + Y^2$ est-il dans l'idéal engendré par $f_1 = X^2Y + Y$ et $f_2 = Y^2 - 1$?

Plus difficiles

Exercice 6. Soit $f = x^4 + x^2y^2 + y^3 - x^3 \in \mathbb{C}[x, y]$ et $I =< f, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y >$.

(a) Calculer la dimension de $\mathbb{C}[x, y]/I$.

(b) A-t-on $x^5 = y^5 \mod I$?

Exercice 7.

(a) Déterminer une base de Gröbner pour l'idéal $< x_3 - x_1^5, x_2 - x_1^3 >$ pour l'ordre lexicographique, puis pour l'ordre lexicographique gradué inverse.

(b) Déterminer la forme normale de $x_1x_2x_3$ pour chacune de ces bases.

Exercice 8. On rappelle que si S est une base de Gröbner de $I \subset k[X_1, ..., X_n]$ pour l'ordre invlex et $m \leqslant n$, alors $S' := S \cap k[X_1, ..., X_m]$ est une base de Gröbner de $I' := I \cap k[X_1, ..., X_m]$. Le but de l'exercice est d'obtenir des équations de l'image de l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3, t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$.

(a) Déterminer une base de Gröbner pour l'idéal $I :=< x - t^3, y - t^4, z - t^5 >$ pour l'ordre lexicographique $x < y < z < t$.

(b) Vérifier que I est l'idéal du graphe de f dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3$ et que $I' := I \cap \mathbb{C}[x, y, z]$ est l'idéal de l'image de f.

(c) Conclure.

Exercice 9. Soit k un corps. Montrer qu'aucun idéal principal de $k[X, Y]$ n'est maximal. *Si $I = (P)$ avec $\deg_Y P \geqslant 1$, $P(x, y) = P_d(x)Y^d + \cdots P_o(x)$, on pourra considérer une extension finie de k où P_d admet une valeur non nulle.*