Université de Rennes

Algèbre commutative-Géométrie algébrique

Feuille de TD 2 : Résultants

Plusieurs exercices de cette feuille sont inspirés du livre de Brendan Hassett (Algebraic Geometry) et du poly de Bernard Le Stum.

Cours

Exercice 1. Soit K un corps. Rappeler la démonstration de l'égalité $\operatorname{Res}(F,G) = a_f^{g-h}\operatorname{Res}(F,H)$ si F, G sont deux polynômes de $K[X]$ de degré f et g et H dans $K[X]$ vérifie $G = QF + H$ et $\deg H = h \leqslant g$. Ici a_f est le coefficient dominant de F.

Exercice 2. Soit F et G deux polynômes de $R[X]$ tels que la matrice qui définit leur résultant soit de rang $\deg F + \deg G - 1$. Montrer que F et G ont un facteur de degré 1 commun, mais pas de facteur de degré 2.

Résolution de systèmes

Exercice 3. Résoudre

$$\begin{cases} x^3 + 3x + 1 & = 0 \\ x^2 - 4x + 1 & = 0. \end{cases}$$

Exercice 4.

(a) Montrer le résultant en X de $P(X,Y) = X^2 + Y^2 + X^3 + Y^3$ et $Q(X,Y) = X^3 + Y^3 - 2XY$ vaut $\operatorname{Res}_X(P,Q) = \operatorname{Res}_X(P, -(X+Y)^2) = P(-Y,Y)^2 = 4Y^4$.

(b) En déduire les solutions du système

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + X^3 + Y^3 & = 0 \\ X^3 + Y^3 - 2XY & = 0 \end{cases}$$

Exercice 5. Soit K un corps et $x, y \in K$. Montrer à l'aide d'un résultant que

$$(\exists t \in \overline{K} / x = t^2, y = t^5) \iff y^2 = x^5$$

Applications

Exercice 6. Soit R un anneau intègre, $\alpha, \beta \in R$ et $F, G \in R[X]$ tels que $F(\alpha) = G(\beta) = 0$.

(a) Montrer que $R(X) := \operatorname{Res}_Y(F(Y), G(X-Y))$ est un polynôme annulateur de $\alpha + \beta$.

(b) En déduire un polynôme annulateur de $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

(c) Construire un polynôme annulateur du produit $\alpha\beta$.

Exercice 7. Soit K un corps. On rappelle que le discriminant d'un polynôme $P \in K[X]$ de degré d premier à la caractéristique de K et de coefficient dominant a_d est défini par l'égalité $\mathrm{Res}(P, P') = (-1)^{d(d-1)/2} a_d \,\mathrm{disc}(P)$.

(a) Démontrer qu'un polynôme P a une racine multiple dans la clôture algébrique $\overline{K}$ de K (i.e. se factorise dans $\overline{K}[X]$ par $(X-\alpha)^2$ pour un $\alpha \in \overline{K}$) si et seulement si $\mathrm{disc}(P) = 0$.

(b) Calculer le discriminant de $aX^2 + bX + c$.

(c) Calculer le discriminant de $X^3 + pX + q$.

Exercice 8. Soit
$$P(X, Y) = Y - X(X-1)(X+1).$$

(a) Calculer le discriminant $d(Y)$ de P considéré dans $\mathbb{C}(Y)[X]$.

(b) Interpréter ses racines en termes géométriques pour la courbe affine d'équation $P(X, Y) = 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 9. Soit k un corps. Le but de l'exercice est de montrer que l'équation de l'hypersurface universelle
$$H(X, a_0, \cdots, a_d) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_0 \in k[X, a_0, \cdots, a_d]$$
est irréductible. On considère le morphisme d'algèbres
$$\begin{array}{rccc} \phi : & k[X, a_0, \cdots, a_d] & \to & k[X, \alpha_1, \cdots, \alpha_d, a_d] \\ & X & \mapsto & X \\ & a_{d-k} & \mapsto & (-1)^k a_d \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}. \end{array}$$
qui correspond aux relations coefficients-racines, c'est à dire $\phi(\sum_{i=1}^d a_i X^i) = a_d \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i)$.

(a) Montrer que ϕ conserve le degré en X.

(b) Supposons que H s'écrive $H = P_1 P_2$ avec $P_i \in k[X, a_0, \cdots, a_d]$ et que $(X - \alpha_1)$ divise $\phi(P_1)$. Montrer que $\prod_{i=1}^d (X - \alpha_i)$ divise $\phi(P_1)$. En déduire que $\phi(P_2)$ est constant.

(c) Conclure.