Feuille de TD 1 : Anneaux et algèbres

Plusieurs exercices de cette feuille sont inspirés du livre de Daniel Perrin (Cours d'Algèbre).

R-algèbres

Exercice 1. Soit $(R, +, \times)$ un anneau (commutatif unitaire). On rappelle qu'une R-algèbre est un anneau $(A, +, \times)$ muni d'une loi externe $\cdot : R \times A \to A, (c, f) \mapsto c \cdot f$ compatible avec les opérations $+$ et $\times$ de R et A.

(a) Rappeler les relations de compatibilité de la loi externe $\cdot$ avec $+$ et $\times$ dans une R-algèbre.

(b) Montrer qu'une R-algèbre est un anneau A muni d'un morphisme d'anneaux $R \to A$.

(c) Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une R-algèbre. Montrer que $(A, +, \cdot)$ est un R-module et que la multiplication $\times : A \times A \to A$ est R-bilinéaire.

(d) Réciproquement, montrer qu'un R-module $(M, +, \cdot)$ muni d'un produit $\times : M \times M \to M$ bilinéaire tel que $(M, +, \times)$ est un anneau, fait de $(M, +, \times, \cdot)$ une R-algèbre.

Exercice 2. Soit R un anneau et A l'algèbre (non-unitaire) des suites presque nulles à coefficients dans R munie des opérations $+, \times, \cdot$ coordonnées par coordonnées. L'application $A \to R[X], (r_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_i r_i X^i$ est-elle bien définie ? est-elle un isomorphisme d'algèbres ?

Polynômes

Exercice 3. (a) Donner l'exemple d'un corps K et d'un polynôme $P \in K[X]$ non nul et tel que pour tout $r \in K$, $P(r) = 0$.

(b) Soit p un nombre premier. Soit R l'anneau $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$ et $P(X) = X^p - X \in R[X]$. Montrer que P n'est pas nul et que pour tout $r \in R$, $P(r) = 0$.

(c) Donner l'exemple d'un anneau R et de deux polynômes P et Q de $R[X]$ tels que $\deg(PQ) < \deg P + \deg Q$.

Exercice 4. Soit P et Q deux polynômes de l'anneau factoriel $\mathbb{C}[X, Y]$ sans facteurs communs.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme non nul D de $\mathbb{C}[X]$ et des polynômes U, V de $\mathbb{C}[X, Y]$ tels que $D = UP + VQ$. *On pourra travailler dans l'anneau* $\mathbb{C}(X)[Y]$.

(b) En déduire que l'ensemble $V(P, Q) := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, P(x, y) = Q(x, y) = 0\}$ est un ensemble fini.

Anneaux principaux, factoriels

Exercice 5.

(a) Rappeler les définitions dans un anneau intègre d'irréductibilité d'un élément, d'association de deux éléments, de primalité et de maximalité d'un idéal.

(b) Soit A un anneau intègre et p un élément non nul tel que (p) est premier. Montrer que p est irréductible.

(c) Soit A un anneau factoriel. Montrer qu'un élément p de A est irréductible ou nul si et seulement si (p) est premier.

(d) Soit A un anneau intègre et p un élément irréductible. Montrer que (p) est maximal parmi les idéaux principaux.

Exercice 6. Soit K un corps. On rappelle que si A est un anneau commutatif noethérien, alors $A[X]$ est aussi noethérien (Théorème de la base de Hilbert).

(a) Soit I un idéal de $K[X,Y]$. Montrer que l'anneau $K[X,Y]/I$ est noethérien.

(b) L'anneau $K[X,Y]/(XY)$ est-il factoriel ?

(c) L'anneau $K[X,Y]/(Y^3 - X^2)$ est-il factoriel ? *On pourra vérifier que* $[Y]$ *est irréductible mais que* $([Y])$ *n'est pas premier.*

(d) L'anneau $K[X,Y]/(Y - X^2)$ est-il factoriel ? *On pourra considérer le morphisme d'algèbres* $K[X,Y] \to K[T], X \mapsto T, Y \mapsto T^2$.

(e) L'anneau $K[X,Y]/(XY - 1)$ est-il factoriel ?

Exercice 7.

(a) Montrer qu'un anneau principal est noethérien.

(b) Montrer qu'un anneau noethérien vérifie l'existence de la décomposition en produit d'irréductibles. *On pourra raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble des idéaux* (x) *engendrés par les éléments qui n'admettent pas d'écriture en produits d'irréductibles.*

(c) Soit A un anneau intègre avec l'existence de la décomposition en produit d'irréductibles. Supposons de plus que pour tout élément irréductible p, l'idéal (p) est premier. Montrer qu'il y a alors unicité dans la décomposition en produit d'irréductibles à association et ordre près. *On pourra raisonner par récurrence sur la longueur des décompositions et considérer un anneau quotient.*

(d) Montrer qu'un anneau principal est factoriel et que tout idéal premier non nul et strict y est maximal.

Exercice 8. On admet qu'un anneau intègre dont tous les idéaux premiers sont principaux est principal. Montrer qu'un anneau factoriel, dont chaque idéal premier non nul est maximal, est un anneau principal. *On pourra prendre un idéal premier I, un élément non nul x de I et montrer l'existence d'un facteur irréductible p de x qui engendre I.*

Anneaux intégralement clos

Exercice 9. Soit A un sous-anneau d'un anneau B. On dit qu'un élément b de B est *entier* sur A s'il est solution d'une équation polynômiale unitaire à coefficients dans A. On dit qu'un anneau intègre A est *intégralement clos* si tout élément x de son corps des fractions K entier sur A est en fait dans A.

(a) Montrer que tout élément non nul du corps des fractions d'un anneau factoriel A s'écrit comme quotient x/y d'éléments de A sans facteurs communs. Montrer que cette écriture est unique à association près.

(b) Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.

(c) Construire un morphisme d'algèbre injectif de $A := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^3 - X^2)$ dans $\mathbb{C}[T]$. En déduire que le corps des fractions de A est isomorphe à $\mathbb{C}(T)$. En utilisant l'image de T dans le corps des fractions de A, montrer que A n'est pas intégralement clos.