Feuille de TD 4 : Exponentielle de matrices

CALCUL D'EXPONENTIELLES DE MATRICES

Exercice 1. Soit les matrices $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$. Calculer e^{A+B} et $e^A e^B$.

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 11 & 17 & -1 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que la matrice A est nilpotente.
 (b) Calculer e^A .

Exercice 3. On note $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA} .

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

- (a) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A .
 (b) La matrice A est-elle diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) ? Triangularisable (sur $\mathbb{R}$) ?
 (c) Calculer $\det(e^A)$.
 (d) Calculer $e^{\text{tr}A}$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A et B commutent alors les matrices A et $\exp(B)$ commutent également.

SYSTÈME LINÉAIRE

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

- (a) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$
 (b) Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + z \\ y' &= 3y - z \\ z' &= 2x + y + 3z \end{cases}$$

de condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -2, 1)$.

Exercice 7. On reprend l'exercice précédent.

- (a) Vérifier que la matrice A est inversible et que tout système $X' = AX + B$ est donc équivalent à $Y' = AY$ si $Y := X + A^{-1}B$.
 (b) Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + z + 1 \\ y' &= 3y - z + 2 \\ z' &= 2x + y + 3z + 3 \end{cases}$$

de condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -2, 1)$.

Exercice 8 (Oscillateur harmonique). L'équation du mouvement d'une masse attachée à un ressort s'écrit $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ où $x(t)$ est la position à l'instant t par rapport au point d'équilibre et $\omega > 0$ est appelée pulsation. On considère alors le vecteur position vitesse $X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que le vecteur $X(t)$ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ à préciser.
- (b) Résoudre l'équation $X'(t) = AX(t)$ avec conditions initiales $X(0) = (1, 0)$.
- (c) Représenter en fonction du temps, la position d'une masse attachée à un ressort et lâchée à l'instant $t = 0$ à l'abscisse $x = 1$ avec une vitesse initiale nulle.

POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 9. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

- (a) Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ i.e. que toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ (au sens de la norme sur $M_n(\mathbb{K})$ définie dans le cours). On pourra par exemple commencer par montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, la matrice $A_k := A - \frac{1}{k}I_n$ est inversible.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ i.e. que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ (au sens de la norme sur $M_n(\mathbb{C})$ définie dans le cours). On pourra par exemple commencer par montrer que toute matrice triangulaire supérieure est limite d'une suite de matrices ayant chacune ses valeurs propres deux à deux distinctes.