Feuille de TD 1 : Dualité

1. EXERCICES ÉLÉMENTAIRES SUR LA DUALITÉ

Exercice 1.

- (a) Déterminer la base duale de la base $\{(1, 2), (3, 4)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
 (b) Déterminer la base duale de la base $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2.

- (a) Montrer que les formes linéaires

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & 2x_1 - x_2 + x_3 \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \end{array}$$

forment une famille libre de $(\mathbb{R}^3)^*$ et la compléter en une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

- (b) Montrer que les formes linéaires

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{array} , \\ \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_2 + x_3 \end{array} , \\ \varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \end{array} \end{aligned}$$

forment une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ et en déterminer la base antéduale.

2. SUR LES ESPACES DE POLYNÔMES

Exercice 3 (Polynômes de Lagrange).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes en une indéterminée, à coefficients réels et de degré au plus n . Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on définit l'application

$$\varphi_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(\alpha_i) \end{array}$$

- (a) Vérifier que, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, φ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
 (b) Montrer que la famille $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
 (c) Déterminer la base antéduale de la base $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ (autrement dit une base $\{L_0, \dots, L_n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $L_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$).

Exercice 4 (Une formule bien connue).

- (a) On considère la base canonique $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n) = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que sa base duale est $\mathcal{B}^* = (P_0^*, P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*)$ où $P_k^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \end{array}$

- (b) Écrire explicitement la formule

$$P = \sum_k P_k^*(P) P_k.$$

3. POUR CONSTRUIRE DES ÉQUATIONS

Exercice 5. *Le but de l'exercice est de déterminer un système d'équation pour un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^5$.*

- (a) Soit $a = (1, 2, 0, 0, 0)$, $b = (3, 4, 0, 0, 0)$ et $c = (0, 0, 1, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^5$ et V le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(a, b, c)$ de $\mathbb{R}^5$ engendré par $\{a, b, c\}$. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre et la compléter en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^5$.
- (b) Déterminer la base duale de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^5$.
- (c) Déterminer l'annulateur V° du sous-espace vectoriel V . Déterminer un système d'équation pour V .
- (d) Soit $d = (1, 4, 1, 2, 0)$ et $V' = \text{vect}(a, b, c, d) = V + \text{vect}(d)$. En utilisant la formule (de l'exercice 9 (b))

$$(V')^\circ = (V + \text{vect}(d))^\circ = V^\circ \cap (\text{vect}(d))^\circ,$$

déterminer l'annulateur $(V')^\circ$ de V' et un système d'équation pour V' .

Exercice 6. Déterminer un système d'équation pour le sous-espace W de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\alpha = (1, 2, -3, 2)$, $\beta = (1, 1, -2, 2)$, $\gamma = (0, 1, -1, 0)$.

Exercice 7. *Le but de l'exercice est de déterminer une base pour un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ donné par un système d'équation. Soit*

$$V = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\}.$$

La méthode de Gauss permet d'en déterminer une base. Nous allons utiliser une autre méthode, basée sur la notion de base antéduale.

- (a) Donner deux formes linéaires φ_1 et φ_2 sur $\mathbb{R}^5$ telles que

$$V = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5, \varphi_1 = 0 \text{ et } \varphi_2 = 0\}.$$

- (b) Vérifier que la famille (φ_1, φ_2) est une famille libre de $(\mathbb{R}^5)^*$ et compléter-la en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_5)$ de $(\mathbb{R}^5)^*$.
- (c) Déterminer la base antéduale $(e_1, \dots, e_5)$ de $(\varphi_1, \dots, \varphi_5)$.
- (d) En déduire une base de V .

Exercice 8. Soit $a = (1, 2, 0)$, $b = (3, 4, 0)$ et $c = (0, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Montrer que $\mathcal{B} = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Déterminer la base duale de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
- (c) Déterminer une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ qui vaut 1 sur a , 2 sur b et 3 sur c .

4. POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que

- (a) si $F_1 \subset F_2$, alors $F_2^0 \subset F_1^0$,
- (b) $(F_1 + F_2)^0 = F_1^0 \cap F_2^0$,
- (c) $(F_1 \cap F_2)^0 = F_1^0 + F_2^0$ (indication : montrer l'une des deux inclusions puis utiliser un argument de dimension pour conclure).

Exercice 10. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (a) Montrer que $(\text{Im } f)^0 = \text{Ker } {}^t f$.
- (b) En déduire que $\text{rg } ({}^t f) = \text{rg } (f)$.