

Calcul Matriciel : Examen de seconde session (15 juin 2021)

Durée : 2h. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit W un sous-espace vectoriel de E^* . Donner la définition de l'annulateur de W et montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E .

2. Soit M une matrice carrée à coefficients réels. Montrer que la matrice tMM est diagonalisable "dans une base orthonormale".

3. Donner la définition du rayon spectral d'une matrice carrée à coefficients complexes.

Exercice 2 1. Montrer que la famille $\{(1, 0, -2), (0, 1, 2), (1, -1, 0)\}$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer sa base duale, exprimée en fonction de la base duale $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ de la base canonique de \mathbb{R}^3 .

2. En déduire une équation linéaire (en les coordonnées x, y, z dans la base canonique de \mathbb{R}^3) du plan vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(1, 0, -2)$ et $(0, 1, 2)$.

Exercice 3 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer la décomposition QR de A .

Exercice 4 On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de B .

2. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser la matrice B .

3. Déterminer l'exponentielle e^B de la matrice B .

Exercice 5 Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Justifier que la matrice symétrique tMM est définie positive et déterminer la racine carrée de tMM .

2. En déduire la décomposition polaire de la matrice inversible M .

Exercice 6 On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que C est une matrice stochastique et primitive.

2. Déterminer le vecteur d'état limite de C .