Calcul Matriciel : Examen terminal (16 décembre 2020)

Durée : 2h. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit W un sous-espace vectoriel de E^*. Donner la définition de l'annulateur de W et montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E.

2. Donner la définition d'un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien et énoncer le théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux.

3. Enoncer le théorème de décomposition LU.

Exercice 2 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer la décomposition QR de A.

Exercice 3 On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} := \{(1,0,-1),(0,1,0),(-1,0,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est B. Vérifier que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ est J.
3. Déterminer l'exponentielle e^J de la matrice J.
4. En déduire l'exponentielle e^B de B.

Exercice 4 On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice T est-elle symétrique définie positive ?
2. Diagonaliser T “dans une base orthonormale”.
3. En déduire la racine carrée de T.
4. Déterminer la décomposition polaire de la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5 On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que C est une matrice stochastique et primitive.
2. Déterminer le vecteur d'état limite de C.