

Calcul Matriciel : Contrôle continu (22 octobre 2020)

Durée : 2h. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que l'annulateur de F est un sous-espace vectoriel du dual E^* de E .

2. Donner la définition d'une base orthonormale dans un espace euclidien.

3. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 2 1. Montrer que la famille $\{(1, -2, -1), (-1, 1, 2), (1, 0, 0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa base duale. En déduire une équation linéaire du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, -2, -1)$ et $(-1, 1, 2)$.

2. On considère les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$

$$\varphi_1 : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & -y + z \end{matrix}, \quad \varphi_2 : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & 2x \end{matrix}, \quad \varphi_3 : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & -x + y + 2z \end{matrix}$$

On note $\{f_1, f_2, f_3\}$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Écrire les coordonnées de φ_1, φ_2 et φ_3 dans cette base et montrer que la famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

Exercice 3 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

2. Montrer que $F_1^\perp + F_2^\perp \subset (F_1 \cap F_2)^\perp$.

3. En utilisant un argument de dimension, montrer que $F_1^\perp + F_2^\perp = (F_1 \cap F_2)^\perp$.

Exercice 4 1. Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel $F := \text{Vect} \{(1, 0, 1), (1, 2, 3)\}$ de $\mathbb{R}^3$, par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de $M_3(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer la décomposition QR de A .

Exercice 5 On considère la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\chi_D = (-1 - X)^3$.
2. Déterminer le polynôme minimal de D .
3. La matrice D est-elle diagonalisable ? Triangularisable ?
4. Déterminer la forme de Jordan de D .
5. Déterminer une réduction de Jordan de D .