III) Structure de Hodge mixte

a/ Définition

Une structure de Hodge mixte entière est la donnée

- d'un $\mathbb{Z}$-module de type fini $H_{\mathbb{Z}}$
- d'une filtration croissante W de $H_{\mathbb{Q}}$ par des $\mathbb{Q}$-sev appelée filtration par le poids
- d'une filtration décroissante F de $H_{\mathbb{C}}$ par des $\mathbb{C}$-ev appelée filtration de Hodge

tels que

$$Gr_m^W H := \left(Gr_m^W H_{\mathbb{Q}} \, , \quad F^p \, Gr_m^W H_{\mathbb{C}} := \frac{F^p \cap W_m H_{\mathbb{C}} + W_{m-1} H_{\mathbb{C}}}{W_{m-1} H_{\mathbb{C}}} \right)$$

soit une structure de Hodge rationnelle de poids m

b/ Structure de Hodge mixte sur un diviseur à croisements normaux

Soit $Y \subset X$ un diviseur à croisements normaux dans une variété algébrique lisse X.

On écrit la décomposition de Y en composantes irréductibles $Y = \bigcup_{i=1}^{N} Y_i$

Si I est un multi-indice $I = (i_0, \dots i_q)$ $\quad Y_I = \bigcap_I Y_i$ est une ~~sous~~ variété algébrique lisse ~~de~~ *

$$Y_q := \coprod_{|I|=q} Y_I \qquad \qquad \Pi_q : Y_q \longrightarrow Y$$

$$\lambda_{j,q} : Y_q \longrightarrow Y_{q-1} \qquad \qquad Y_{i_0 \dots i_q} \hookrightarrow Y_{i_0 \dots \check{i_j} \dots i_q}$$

$$\lambda_{j,q}^* : \Pi_* \mathbb{Z}_{Y_{q-1}} \longrightarrow \Pi_* \mathbb{Z}_{Y_q} \quad \text{application de restriction}$$

$$\delta_{q-1} = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \lambda_{jq}^*$$

Lemme :

Les complexes
$$\begin{matrix} 0 \\ \uparrow \\ \mathbb{Z}_Y \\ \uparrow \\ 0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \left(\begin{matrix} \vdots \\ \pi_* \mathbb{Z}_{Y_1} \\ \uparrow \delta_0 \\ \pi_* \mathbb{Z}_{Y_0} \\ \uparrow \\ 0 \end{matrix} \right) = (\pi_* \mathbb{Z}_{Y_\bullet}, \delta)$$
de Mayer-Victoris

sont quasi-isomorphes.

$$Y_\bullet = \left(Y_0 \leftleftarrows Y_1 \; \substack{\leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow} \; Y_2 \quad \cdots \quad Y_q \cdots \right) \xrightarrow{\pi} Y$$

La filtration par le poids W sur $\pi_* \mathbb{Q}_{Y_\bullet}$ est définie par

$$W_{-q}(\pi_* \mathbb{Q}_{Y_\bullet}) = \begin{matrix} \pi_* \mathbb{Q}_{Y_{q+1}} \\ \uparrow \\ \pi_* \mathbb{Q}_{Y_q} \\ \uparrow \\ 0 \end{matrix} \qquad Gr^W_{-q} = \underbrace{\pi_* \mathbb{Q}_{Y_q}[-q]}_{\substack{\pi_* \mathbb{Q}_{Y_q} \\ \text{mis en deg } -q.}}$$

La filtration de Hodge se construit sur le complexe simple $s(\pi_* \Omega^*_{Y_\bullet})$ quasi-isomorphe à $\pi_* \mathbb{C}_{Y_\bullet}$

associé au complexe double $\pi_* \Omega^*_{Y_\bullet}$ avec $d : \Omega^*_{Y_\bullet} \to \Omega^{*+1}_{Y_\bullet}$

$\delta_{q-1} : \Omega^*_{Y_{\bullet-1}} \to \Omega^*_{Y_\bullet}$

$$W_{-q} = s(\sigma_{\bullet \geq q} \pi_* \Omega^*_{Y_\bullet})$$

$$F^p = s(\sigma_{* \geq p} \pi_* \Omega^*_{Y_\bullet})$$

La filtration sur ~~Les~~ les pièces graduées correspondent à la filtration de Hodge sur des variétés algébriques lisses.

La suite spectrale associée à la filtration W

a

$$E_1^{p,q} = \mathbb{H}^{p+q}(Y, Gr^W_{-p}\, s(\pi_* \Omega^*_{Y_\bullet}))$$
$$= \mathbb{H}^{p+q}(Y, (\pi_* \Omega^*_{\underline{p}} [-p]))$$
$$= \mathbb{H}^q(Y_{\underline{p}}, \mathbb{C})$$

$$d_1 = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \lambda^*_{j,p+1} : H^q(Y_{\underline{p}}, \mathbb{C}) \longrightarrow H^q(Y_{\underline{p+1}}, \mathbb{C})$$

morphisme de structure de Hodge

muni de structure de Hodge de poids q

On peut en déduire une structure de Hodge de poids q sur $E_2^{p,q}$ et $d_2 : E_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1}$ morphisme de structure de Hodge entre structure de poids différents donc nul.

<u>Prop</u> : La structure de Hodge mixte sur la cohomologie $H^i(Y, \mathbb{C})$ d'un diviseur à croisements normaux a des poids entre 0 et i (puisqu'elle provient des structures de Hodge sur $H^q(Y_{\underline{p}}, \mathbb{C})$ avec $p+q = i$)

c/ Structure de Hodge mixte sur une variété algébrique lisse

Par un théorème de Nagata, toute variété algébrique lisse V se ~~réalise~~ compactifie dans une variété algébrique compacte X.

Par un théorème d'Hironaka, on peut supposer que le complémentaire $X-V$ est un diviseur Y à composantes irréductibles lisses et à croisements normaux.

<u>Def</u> : Le complexe de De Rham logarithmique de (X,Y) est le sous-complexe $\Omega^\bullet_X(\log Y)$ de $\Omega^\bullet_X(*Y)$ des formes à pôles le long de Y, des formes ω telles que

$f\omega$ et $f d\omega$ soient holomorphes.

Dans des coordonnées locales holomorphes $z_1 \ldots z_n$ où Y est définie par

$$z_1 \ldots z_r = 0$$

$$\Omega^1_X(\log Y) = \left\langle \frac{dz_1}{z_1} \ldots \frac{dz_r}{z_r}, dz_{r+1} \ldots dz_n \right\rangle$$

$$\Omega^p_X(\log Y) = \Lambda^p \Omega^1_X \log(Y)$$

La filtration par le poids est donnée par

$$W_m\left(\Omega^p_X(\log Y)\right) = \Omega^{p-m}_X \wedge \Omega^m_X(\log Y)$$

De plus

$$W_m\left(\Omega^p_X(\log Y)\right) \xrightarrow{\text{res}} \pi_* \Omega^{p-m}_{Y_{\underline{m}}}$$

donne un isomorphisme

$$Gr^W_m\left(\Omega^p_X \log Y\right) \xrightarrow{\sim} \pi_* \Omega^{p-m}_{Y_{\underline{m}}}$$

$$Gr^W_m\left(\Omega^\bullet_X \log Y\right) \simeq \left(\pi_* \Omega^\bullet_{Y_{\underline{m}}}\right)[-m]$$

$$\mathrm{Gr}^W_m \, \Omega^\bullet_X(\log Y) \simeq \pi_* \Omega^\bullet_{Y_{\underline{m}}}[-m]$$

$$\mathcal{H}^i(\mathrm{Gr}^W_m \, \Omega^\bullet_X(\log Y)) \simeq \mathcal{H}^i(\qquad) \simeq \pi_* \mathbb{C}_{Y_{\underline{m}}}$$

pour $i = m$

0 sinon

On en déduit que

$$\mathcal{H}^i(W_m \, \Omega^\bullet_X(\log Y)) \simeq \mathcal{H}^i(\tau_m \, \Omega^\bullet_X(\log Y))$$

filtration par troncation.

$$\simeq \mathcal{H}^i(\tau_m \, j_* \Omega^\bullet_U)$$

car $\left(\frac{dz_a}{z_a}\right)_{a=1..r}$ est une base duale de $H_1(U, \mathbb{C})$ localement.

→ La filtration W_m est donc rationnelle.

→ $\mathbb{H}(\Omega^\bullet_X(\log Y)) = H(U, \mathbb{C})$

La filtration de Hodge est donnée par

$$F^p = \Omega^{*\geq p}_X(\log Y)$$

compatible avec l'application résidu

$$\mathrm{Res} \quad F^p \, \mathrm{Gr}^W_m \Omega^\bullet_X(\log Y) \xrightarrow{\sim} F^{p-m} \, \Omega^\bullet_{Y_{\underline{m}}}[-m](-m)$$

twist

La suite spectrale associée ~~par~~ à la filtration par le poids

sur l'hypercohomologie $\mathbb{H}(\Omega_X^{\cdot}(\log Y))$

a

$$E_1^{p,q} = \mathbb{H}^{p+q}(X, Gr^W_{-p}\, \Omega_X^{*}(\log Y))$$

paramètre d'une filtration croissante

$$= \mathbb{H}^{p+q}(X, \pi_* \Omega^{\cdot}_{Y_{-p}}[p])(+p)$$ ≈ Twist de Tate

$$= H^{2p+q}(Y_{-p}, \mathbb{C})(+p)$$ Structure de Hodge de poids q

$$E_\infty^{p,q} = Gr^W_q H^{p+q}(U, \mathbb{C})$$

On peut montrer que d_1 est un morphisme de structure de Hodge

et par suite que $d_2 = 0$

On en déduit que les poids sur $H^i(U, \mathbb{C})$

sont entre i et $2i$.

$Gr^W_q H^i(U, \mathbb{C}) = {}^W E_2^{i-q,q}$ sous quotient

de $H^{2i-q}(Y_{q-i}, \mathbb{C})(i-q)$

$i \leq q \leq 2i$

$(2i-q) - 2(i-q) = q$

d/ Théorème de Deligne

La cohomologie $H^i(X, \mathbb{C})$ d'une variété algébrique

admet une structure de Hodge mixte fonctorielle

par rapport aux morphismes algébriques de poids

entre 0 et $2i$.

Exemple : Surface de Riemann

$\bar{C}$ surface de Riemann compacte

$C = \bar{C} - \{x_1 \dots x_m\}$

$$0 \to \underset{\mathbb{Z}^{2g}}{\overset{\wr}{H^1(\bar{C}, \mathbb{Z})}} \to H^1(C, \mathbb{Z}) \to \underset{\mathbb{Z}^m}{\overset{\wr}{H^2_D(\bar{C}, \mathbb{Z})}} \to \underset{\mathbb{Z}}{\overset{\Vert}{H^2(\bar{C}, \mathbb{Z})}} \to \underset{0}{\overset{\Vert}{H^2(C, \mathbb{Z})}} \to 0$$

$W_1 \; H^1(C, \mathbb{Z}) = H^1(\bar{C}, \mathbb{Z})$

$W_2 \; H^1(C, \mathbb{Z}) = H^1(C, \mathbb{Z}) \qquad G^W_2 \simeq \mathbb{Z}^{m-1}$

$F^0 \; H^1(C, \mathbb{C}) = H^1(C, \mathbb{C})$ de rang $2g+m-1$ $\qquad G^0_F = H^1(\bar{C}, \mathcal{O}_{\bar{C}})$ rg g

$F^1 \qquad \simeq \mathbb{H}^1(\bar{C}, 0 \to \Omega^1_{\bar{C}} \log D) = \mathbb{H}^0(\bar{C}, \Omega^1_{\bar{C}}(\log D))$

de rang $2g+m-1 \quad -g$

$F^2 \quad = 0$

$$0 \to \Omega^1_{\bar{C}} \to \Omega^1_{\bar{C}} \log D \to \mathcal{O}_D \to 0$$

$$0 \to \underset{\mathbb{C}^g}{\overset{\wr}{H^0(\Omega^1_{\bar{C}})}} \to H^0(\Omega^1_{\bar{C}} \log D) \to \underset{\mathbb{C}^m}{\overset{|}{H^0(\mathcal{O}_D)}} \to \underset{\mathbb{C}}{\overset{|}{H^1(\bar{C}, \Omega^1_{\bar{C}})}}$$

$$H^1(\bar{C}, \Omega^1_{\bar{C}} \log D) \to 0$$

Donc $H^1(\bar{C}, \Omega^1_{\bar{C}} \log D) = 0$