RÉDUCTIONS DES ENDOMORPHISMES

Lien pour le cours à distance

1. Pour Lundi 9 novembre : Réductions et décomposition polaire des matrices

Lire le texte Décomposition polaire et faire les exercices suivants.

Exercice 1.

Rédiger les premières questions de l'épreuve de 2003.

Exercice 2 (En caractéristique p)**.**

Montrer que si K est un corps algébriquement clos de caractéristique non nulle p, et A une matrice de $M_2(K)$, alors A^p est diagonalisable.

Exercice 3 (En pratique)**.**

(1) Déterminer si $A := \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ est positive, définie. Si possible, calculer sa racine carrée.

(2) Déterminer la décomposition polaire de la matrice $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Décomposition polaire d'un endomorphisme)**.**

Soit H un espace hermitien et a un endomorphisme inversible de H. Montrer que a s'écrit de façon unique sous la forme $a = hu$ où h est un endomorphisme auto-adjoint positif et u unitaire. Déterminer h et u pour l'endomorphisme a dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.

2. Pour Lundi 16 novembre : Décomposition de Jordan et de Frobenius

Lire Décomposition de Jordan et Décomposition de Frobenius et faire les exercices.

Exercice 5 (Questions de cours)**.**

(1) Soit u un endomorphisme dont le polynôme minimal est scindé. Soit $u = d + n$ sa décomposition de Jordan avec d diagonalisable et n nilpotent et $n \circ d = d \circ n$. Peut-on avoir simultanément n non nul et u diagonalisable ?

(2) Comment déterminer le nombre de blocs de Jordan d'une matrice nilpotente ?

(3) Comment déterminer la taille du plus grand bloc de Jordan d'une matrice nilpotente ?

Exercice 6.

Montrer qu'un endomorphisme de rang 1 est soit nilpotent, soit diagonalisable. Ecrire la forme de Jordan dans chaque cas.

Exercice 7 (En pratique)**.**

Mettre sous forme de Jordan la matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $C := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

Montrer que deux matrices carrées réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ le sont aussi dans $M_n(\mathbb{R})$.