UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

CONTRÔLE CONTINU DU 21 MARS 2019
(2 HEURES)

Nous recommandons de bien rédiger vos réponses, même partielles, plutôt que de traiter beaucoup de questions. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. Cependant, si vous ne parvenez pas à donner une démonstration complète, donnez une stratégie de démonstration, en indiquant les théorèmes utilisés et en précisant qu'il manque des détails. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement.

Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie... Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Bon travail.

On rappelle que

- pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, +\infty[$, le disque ouvert de centre a et de rayon r est $\Delta_r(a) = \{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$,
- le disque unité ouvert est $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, son bord orienté dans le sens trigonométrique est $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$,
- et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré.

Exercice 1 (Questions de cours, 6 points)**.**

1. Rappeler la définition de la branche principale du logarithme.
2. Rappeler la définition d'une primitive au sens complexe d'une fonction continue f sur $\mathbb{C}$.
3. Donner si possible l'exemple d'une fonction continue non holomorphe f sur $\mathbb{C}$ qui admet une primitive.
4. Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe non constante de Δ dans $\mathbb{C}$. Dans le cas contraire, démontrer la non-existence.
5. Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe non constante de $\mathbb{C}$ dans Δ. Dans le cas contraire, démontrer la non-existence.
6. Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe non constante de $\mathbb{H}$ dans Δ. Dans le cas contraire, démontrer la non-existence.

Exercice 2 (Calcul d'intégrales, 4 points)**.**

Calculer

$$\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)} dz.$$

Exercice 3 (Applications entières, 2 points)**.**

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe non constante.

1. Montrer que le point 0 est dans l'adhérence de l'image de f.
2. Déterminer l'adhérence de l'image de f.

Exercice 4 (Singularités, 4 points)**.**

Soit $D = \mathbb{C}^\star$ et $f : D \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \exp(\frac{1}{z}) - \frac{1}{z}$.

1. Déterminer la nature de la singularité de f en 0 (apparente, polaire ou essentielle).
2. L'application admet-elle une primitive sur D ?
3. Calculer $\int_{\partial\Delta} \exp(\frac{1}{z})dz$.

Exercice 5 (Applications sur le disque, 4 points)**.**

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité Δ. Le but de l'exercice est de montrer que $|f(z)|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers 1.

1. Vérifier l'énoncé pour l'application $\Delta \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z^6-1}$.
2. Supposons d'abord que f n'a pas de zéro dans Δ. Soit r_n une suite de réels de $[0, 1[$, tels que pour tout entier naturel non nul n et tout z de Δ de module supérieur à r_n, $f(z)$ est de module supérieur à n. Montrer alors que pour tout n, $|f(0)| \geq n$ et conclure.
3. Dans le cas général, supposons que $|f(z)|$ tende vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers 1. Montrer qu'on peut écrire f comme produit sur Δ d'un polynôme et d'une application holomorphe g qui n'a pas de zéro dans Δ. Conclure.

Un corrigé sera disponible sur la page du cours.