Licence 3 — Mathématiques 2018–2019

**Fonctions holomorphes (HOLO)**

# CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU DU 21 MARS 2019 (2 HEURES)

**Exercice 1** (Questions de cours, 6 points)**.**

1. Rappeler la définition de la branche principale du logarithme.

$$\begin{array}{rccc} \log: & \mathbb{C}-]-\infty,0] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \ln_{\mathbb{R}}(r)+i\theta \quad \text{après avoir choisi l'écriture } z=re^{i\theta} \text{ avec } r\in[0,+\infty[ \text{ et } \theta\in]-\pi,\pi[ \end{array}$$

2. Rappeler la définition d'une primitive d'une fonction continue $f$ sur $\mathbb{C}$.

Une primitive d'une application continue $f$ sur $\mathbb{C}$ est une application holomorphe $F$ sur $\mathbb{C}$ dont la dérivée complexe $F'$ est l'application $f$.

3. Donner si possible l'exemple d'une fonction continue non holomorphe $f$ sur $\mathbb{C}$ qui admet une primitive.

Comme la dérivée complexe d'une application holomorphe est holomorphe, il n'y a pas de tels exemples.

4. Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe non constante de $\Delta$ dans $\mathbb{C}$. Dans le cas contraire, démontrer la non-existence.

$$\begin{array}{rccc} Id: & \Delta & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z \end{array}$$

est holomorphe non-constante.

5. Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe non constante de $\mathbb{C}$ dans $\Delta$. Dans le cas contraire, démontrer la non-existence.

Par le théorème de Liouville, toute application entière bornée est constante : il n'y a donc pas de tels exemples.

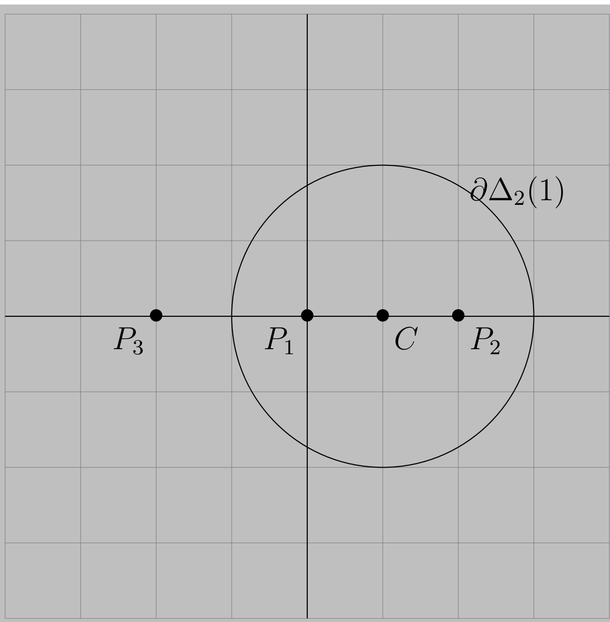
6. Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe non constante de $\mathbb{H}$ dans $\Delta$. Dans le cas contraire, démontrer la non-existence.

$$\begin{array}{rccc} C: & \mathbb{H} & \longrightarrow & \Delta \\ & z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array} \quad \text{ou bien} \quad \begin{array}{rccc} e: & \mathbb{H} & \longrightarrow & \Delta \\ & z & \longmapsto & \exp(2i\pi z) \end{array}$$

**Exercice 2** (Calcul d'intégrales, 4 points)**.**

Calculer

$$\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)}dz.$$




On écrit la décomposition en éléments simples de la fraction rationelle

$$\frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)} = \frac{5}{16}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{16(z+2)} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{4z^2}.$$

Les premier et troisième termes correspondent aux pôles simples $P_2$ et $P_1$ à l'intérieur du cercle $\partial\Delta_2(1)$. Donc,

$$\int_{\partial\Delta_2(1)} \left(\frac{5}{16}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{4z}\right) dz = (2i\pi)(\frac{5}{16} - \frac{1}{4}) = \frac{i\pi}{8}.$$

Le deuxième terme correspond au pôle $P_3$ à l'extérieur du cercle $\partial\Delta_2(1)$ donc, $\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{1}{16(z+2)} dz = 0$. Le dernier terme est l'intégrale sur un chemin fermé de l'application exacte $z \mapsto \frac{1}{4z^2}$ de primitive $z \mapsto -\frac{1}{4z}$. Donc, $\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{1}{4z^2} dz = 0$. En conclusion,

$$\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{z^2+z-1}{z(z^2-4)} dz = \frac{i\pi}{8}.$$

Une autre démarche serait : on écrit la décomposition en éléments simples de la fraction rationelle

$$\frac{1}{z^2(z^2-4)} = \frac{1}{16}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{16(z+2)} - \frac{1}{4z^2}.$$

et donc avec $f(z) = z^2+z-1$ holomorphe sur $\mathbb{C}$

$$\frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)} = \frac{1}{16}\frac{f(z)}{z-2} - \frac{f(z)}{16(z+2)} - \frac{f(z)}{4z^2}.$$

Par le théorème de Cauchy sur les disques, puisque $0$ et $2$ sont dans $\Delta_2(1)$ mais pas $-2$,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)} &= \frac{1}{16}\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{f(z)}{z-2} - \int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{f(z)}{16(z+2)} - \int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{f(z)}{4z^2} \\
&= \frac{2i\pi f(2)}{16} - 0 - \frac{2i\pi f'(0)}{4} = \frac{5i\pi}{8} - \frac{i\pi}{2} = \frac{i\pi}{8}.
\end{aligned}$$

**Exercice 3** (Applications entières, 2 points)**.**

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe non constante.

1. Montrer que le point $0$ est dans l'adhérence de l'image de $f$.

Supposons que $0$ n'est pas dans l'adhérence de l'image de $f$. Il existe alors $r > 0$ tel que $f(\mathbb{C}) \cap \Delta_r = \emptyset$. Autrement dit,

$$\forall z \in \Delta, \ |f(z)| \geq r.$$

L'application $f$ ne s'annule donc pas dans $\mathbb{C}$ et la fonction holomorphe $1/f$ est majorée par $1/r$ sur $\mathbb{C}$. Par le théorème de Liouville, elle est donc constante, ainsi que $f$.

2. Déterminer l'adhérence de l'image de $f$.

Soit $c \in \mathbb{C}$. En appliquant le résultat précédent à $f - c$ on obtient que $c$ est dans l'adhérence de l'image de $f$. Par conséquent, l'adhérence de l'image de $f$ est $\mathbb{C}$.

**Exercice 4** (Singularités, 4 points)**.**

Soit $D = \mathbb{C}^\star$ et $f : D \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \exp(\frac{1}{z}) - \frac{1}{z}$.

1. Déterminer la nature de la singularité de $f$ en $0$ (apparente, polaire ou essentielle)

Si $f$ avait une singularité apparente ou polaire en $0$, comme $z \mapsto 1/z$ a une singularité polaire en $0$, $f + 1/z$ aurait une singularité apparente ou polaire. Or pour tout entier naturel $n$, et pour tout réel $x$ strictement positif, $x^n \exp(\frac{1}{x}) \geq x^n \frac{1}{(n+1)!x^{n+1}}$. Donc, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \exp(\frac{1}{x}) = +\infty$. Par conséquent $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$ a une singularité essentielle en $0$, ainsi que $f$.

2. L'application admet-elle une primitive sur $D$ ?

En écrivant le développement en séries entières de l'exponentielle, on obtient

$$\forall z \in \mathbb{C}^\star, \ \ f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{-n}}{n!}.$$

Or la série, $z + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{-n+1}}{(-n+1)n!}$ est, comme l'application exponentielle, normalement convergente sur $\mathbb{C}^\star$ et y définit donc une application holomorphe $F$ telle que $F'$ qui se calcule comme somme des dérivées, par convergence normale, vérifie $F' = f$ : c'est une primitive de $f$.

3. Calculer $\int_{\partial\Delta} \exp(\frac{1}{z})dz$.

Puisque l'application $f$ est exacte sur $D$ et que $\partial\Delta$ est un chemin orienté fermé dans $D$, $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$. On en déduit

$$\int_{\partial\Delta} \exp(\frac{1}{z})dz = \int_{\partial\Delta} \frac{1}{z} dz = 2i\pi.$$

**Exercice 5** (Applications sur le disque, 4 points)**.**

Soit $f$ une fonction holomorphe sur le disque unité $\Delta$. Le but de l'exercice est de montrer que $|f(z)|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $1$.

1. Vérifier l'énoncé pour l'application $\Delta \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z^6 - 1}$.

Cette application est continue en $i$ : elle ne tend donc pas vers $+\infty$ en module quand $z$ tend vers $i$. Elle ne tend donc pas vers $+\infty$ en module quand $|z|$ tend vers $1$.

2. Supposons d'abord que $f$ n'a pas de zéro dans $\Delta$. Soit $r_n$ une suite de réels de $[0, 1[$, tels que pour tout entier naturel non nul $n$ et tout $z$ de $\Delta$ de module supérieur à $r_n$, $f(z)$ est de module supérieur à $n$. Montrer alors que pour tout $n$, $|f(0)| \geq n$ et conclure.

Par le principe du maximum appliqué à la fonction holomorphe $\Delta \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/f(z)$,

$$|1/f(0)| \leq \sup_{|z|=r_n} |1/f(z)| = \frac{1}{\inf_{|z|=r_n} |f(z)|} \leq 1/n.$$

Donc, pour tout $n$, $|f(0)| \geq n$, ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de telle suite. Donc, dans le cas où $f$ n'a pas de zéro, $|f(z)|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $1$.

3. Dans le cas général, supposons que $|f(z)|$ tende vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $1$. Montrer qu'on peut écrire $f$ comme produit sur $\Delta$ d'un polynôme et d'une application holomorphe $g$ qui n'a pas de zéro dans $\Delta$. Conclure.

Comme $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $1$, il existe $r \in ]0, 1[$ tel que pour tout $z \in \Delta$ avec $|z| > r$, $|f(z)| > 1$. L'application $f$ ne s'annule donc pas sur $\Delta - \overline{\Delta_r}$. Par le théorème des zéros isolés, puisque $f$ holomorphe n'est pas constante, elle n'admet qu'un nombre fini de zéro dans le compact $\overline{\Delta_r}$ et par suite dans tout le disque $\Delta$. Soit $P(z)$ le polynôme unitaire qui a pour zéros les zéros de $f$ avec les mêmes multiplicités. L'application $h = \frac{f}{P}$ a des singularités isolées en les zéros de $f$. Au voisinage de ces zéros, le développement en séries entières de $f$ montre que les singularités sont apparentes et que $h$ tend vers une valeur finie non nulle en ces points. L'application $h$ se prolonge donc par continuité en une application holomorphe $g$ sur $\Delta$. L'égalité $f = hP$ sur $\Delta - f^{-1}(0)$ se prolonge par continuité en $f = gP$ sur $\Delta$. Par construction, par le choix des multiplicités, l'application $g$ n'a pas de zéro aux zéros de $f$, et n'a donc pas de zéro sur $\Delta$. Comme $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $1$ et que $|P|$ tend vers une valeur finie en tout point de $\partial\Delta$, $|g|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $1$. Le cas précédent montre que l'existence d'une telle application $g$ est absurde. Donc, $|f(z)|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $1$.