UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

FEUILLE DE TD N°7
THÉORIE DES RÉSIDUS

On notera $\mathbb{H}$ le demi-plan $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$. Si f est une fonction méromorphe sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, on notera $P(f)$ le lieu de ses pôles.

1. Singularités isolées

Exercice 1 (Exemples de singularités isolées)**.**

Décrire le type singularité (apparente, pôle ou essentielle) des applications suivantes

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z)^2} \ , \ g(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad \text{et } h(z) = e^{1/z}.$$

Exercice 2 (Théorème d'identité)**.**

1. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et f, g deux applications méromorphes sur D. Montrer qu'on a équivalence entre
   i. $f = g$
   ii. $\{z \in D - P(f) - P(g), f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans D.
2. Peut-on construire une application méromorphe sur $\mathbb{C}^\star$ non nulle mais nulle en tous les réels de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 3 (Fonctions rationnelles)**.**

Soit f une application méromorphe sur $\mathbb{C}$ et n un entier naturel et r un nombre réel strictement positif tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} - P(f) - \Delta_r, |f(z)| \leq |z|^n.$$

Montrer que f est une application rationnelle.

2. Série de Laurent

Exercice 4 (Série de Laurent)**.**

Calculer la série de Laurent de $1/(z^2 + z^3)$ au voisinage de l'origine.

3. Résidus

Exercice 5 (Propriété)**.**

Soient deux fonctions g et h holomorphes sur un ouvert connexe du plan complexe, a un pôle de g/h tel que $h(a) = 0$ et $h'(a)$ soit non nul. Montrer que :

$$Res(a, \frac{g}{h}) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

Exercice 6 (Calculs de résidus)**.**

1. L'application $\cot(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ est-elle méromorphe ? Si oui, déterminer ses résidus.
2. Calculer les résidus en tous les pôles de
$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1} \text{ et } g(z) = \frac{z^2 + z + 5}{z(z^2 + 1)^2}.$$

Exercice 7 (Calcul d'intégrales)**.**

1. Montrer que
$$\int_{\partial \Delta_2} \frac{dz}{\sin^2 z \cos z} = 0.$$
2. Calculer les intégrales suivantes, où les chemins fermés simples γ sont parcourues dans le sens direct.

i. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)}dz$ où $\gamma = \partial\Delta_{1/2}(2)$ est le cercle centré en 2 de rayon 1/2 ;

ii. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp(z)}{z^2(z-9)^2}dz$ où $\gamma = \partial\Delta$ est le cercle centré en l'origine de rayon 1 ;

Exercice 8 (Somme de résidus)**.**

Soit $f(z)$ une fonction rationnelle, quotient d'un polynôme $P(z)$ par un polynôme $Q(z)$. On suppose que $\deg P + 2 < \deg Q$. Montrer que

$$\sum_{c\in\mathbb{C}} Res_c(f) = 0.$$

4. Calculs à l'aide du théorème des résidus

Exercice 9 (Calcul d'intégrales trigonométriques)**.**

1. Soit a un nombre complexe de module différent de 1. Montrer que

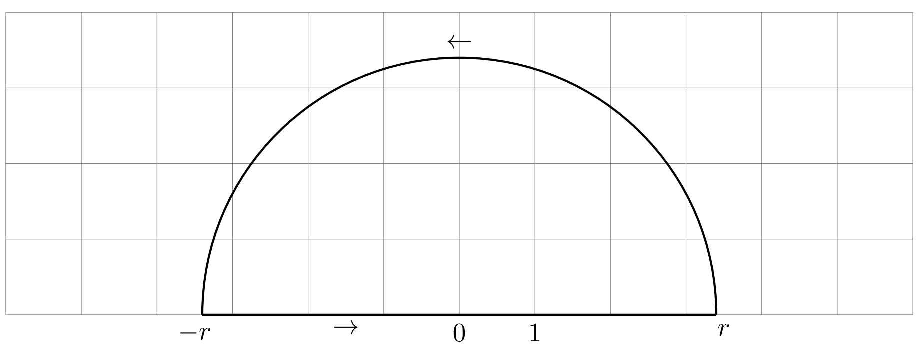
$$i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta + a^2} = \int_{\partial\Delta} \frac{dz}{(z-a)(1-az)}.$$

2. Déterminer les résidus des pôles de $\frac{1}{(z-a)(1-az)}$ contenus dans le disque unité ouvert.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$.

Exercice 10 (Calcul d'intégrales rationnelles)**.**

On considère la fonction méromorphe $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $zf(z)$ a une limite quand $|z|$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ converge.
3. Déterminer les pôles de f contenus dans le demi-plan $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ et leurs résidus.
4. En intégrant sur le chemin Γ défini par



montrer que

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\partial(\Delta_r\cap\mathbb{H})} f(z)dz = 2i\pi \sum_{c\in\mathbb{H}} Res_c(f).$$

5. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5. Nombre de zéros

Exercice 11 (Contraintes)**.**

1. Montrer que le polynôme $f(z) = 3 + 7z + 2z^4$ a, comme le polynôme $3 + 7z$, exactement un zéro dans Δ.
2. Déterminer le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de $z^5 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{4} + \frac{1}{3}$ dans Δ.
3. Déterminer le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de $z^5 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{4} + \frac{1}{3}$ dans $\Delta_{\frac{1}{2}}$.
4. Déterminer le nombre de zéros du polynôme $z^4 - 5z - 1$ dans la couronne $1 < |z| < 2$.