Fonctions holomorphes (HOLO)

FEUILLE DE TD N°6
APPLICATION DE LA THÉORIE DE CAUCHY

Une fonction holomorphe f est dite entière si elle est définie sur le plan complexe tout entier.

1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 1 (Calculs)**.**

Développer si possible en séries entières au voisinage de 0 les applications

i. $f(z) = \sin(z)^2$.
ii. $g(z) = \cos(z^2 - 1)$.
iii. $h(z) = \frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$.

Exercice 2 (Intégrale)**.**

Soit a et b deux nombres complexes tels que $|a| < 1 < |b|$ et m, n deux entiers naturels. Déterminer la valeur de

$$\int_{\partial\Delta} \frac{d\xi}{(\xi - a)^m(\xi - b)^n}.$$

Exercice 3 (Equation différentielle)**.**

Déterminer toutes les applications holomorphes f sur $\mathbb{C}$ telles que $f'' + f = 0$.

Exercice 4 (Prolongement)**.**

Soit c un point de $\mathbb{C}^-$.

1. Déterminer un développement en séries entières $\sum_n a_n(z-c)^n$ centré en c de la branche principale du logarithme $\log$.
2. Déterminer le rayon de convergence du développement précédent.
3. La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n$ coïncide-t-elle avec $\log$ sur l'intersection de $\mathbb{C}^-$ et de son disque de convergence.

Exercice 5 (Nombres de Bernouilli)**.**

On définit les nombres de Bernouilli comme les nombres complexes B_n tels que sur le domaine de convergence

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série précédente est 2π.
2. A partir de la relation $\frac{z}{e^z-1}\frac{e^z-1}{z} = 1$ déterminer une relation de récurrence entre les B_n.
3. Exprimer $\frac{e^z-1}{z}$ en fonction de $\frac{\sinh(z/2)}{\cosh(z/2)}$ et en déduire que pour n impair plus grand que 3, $B_n = 0$.
4. Calculer $B_0, B_1 \cdots B_8$.
5. Montrer que tous les B_n sont rationnels.
6. La suite des B_n est-elle bornée ?

2. CONCEPT D'HOLOMORPHIE

Exercice 6 (Polynômes)**.**

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Montrer qu'il y a équivalence entre

i. f est polynomiale.

ii. Il existe $c \in D$ tel que en dehors d'un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 7 (Propriétés)**.**

Pour chacune des propriétés suivantes, donner un exemple d'application holomorphe au voisinage de 0 qui la satisfait, ou bien démontrer qu'il n'existe pas de telles applications.

1. Pour presque tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$.
2. Pour presque tout $n \in \mathbb{N}$,$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2-1}$.
3. Pour presque tout $k \in \mathbb{N}$,$|f^{(k)}(0)| \geq (n!)^2$.
4. Pour presque tout $n \in \mathbb{N}$,$|f(\frac{1}{n})| \leq e^{-n}$ et f est non nulle.

Exercice 8 (Prolongement)**.**

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ $a \in D$ et $f : D - \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. On suppose que f' admet un prolongement holomorphe à D. Est-ce aussi le cas pour f ?

Exercice 9 (Contraintes)**.**

1. Soit une fonction holomorphe f entière définie sur le plan complexe tout entier, on suppose que $Re(f) \leq 0$. Montrer que f est une fonction constante. On pourrait considérer la fonction $e^{f(z)}$.
2. Soit une fonction holomorphe f au voisinage de 0. Montrer que si $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right)$ pour tout n assez grand alors f est une constante.
3. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que sur D, $v = u^2$. Montrer que f est une fonction constante.
4. Soit une fonction entière f telle que $|f|$ tend vers l'infini si $|z|$ tend vers l'infini. Montrer que :
   i. f n'admet qu'un nombre fini de zéros.
   ii. f est un polynôme.
5. Soit une fontion entière f non constante, montrer que l'image du plan complexe par f est dense dans $\mathbb{C}$.
6. Soit une fonction f holomorphe sur le plan complexe en entier, vérifiant $f(x+1) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une fonction périodique de période 1.