

On rappelle que $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ et que \log désignera la branche principale du logarithme définie sur \mathbb{C}^- à valeurs dans $B := \{z \in \mathbb{C} / -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$. On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. INTÉGRALES SUR LES CHEMINS DU PLAN COMPLEXE

Exercice 1 (Calculs).

- On considère le bord \mathcal{C} du triangle de sommet : $z = 0$, $z = 1$, et $z = i$, orienté dans le sens direct. Calculer les intégrales $\int_{\mathcal{C}} x dz$ et $\int_{\mathcal{C}} z e^z dz$.
- Soit le cercle unité \mathcal{C} parcouru dans le sens direct. Pour tout entier relatif n , calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} z^n dz$. Expliquer le cas particulier où $n = -1$.
- Montrer $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$, lorsque $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- Montrer $\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \pi e$, lorsque $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Exercice 2 (Intégrale elliptique).

Soient deux réels strictement positifs a et b , on pose $\gamma = a \cos(t) + ib \sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer l'intégrale $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ et en déduire : $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}$.

Exercice 3 (Existence de primitive).

Soit $D := \mathbb{C} - [0, 1]$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$.

- D est-il un ouvert étoilé ?
- La fonction $F : z \mapsto \log(1 - \frac{1}{z})$ est-elle bien définie et continue sur D ?
- Montrer que pour tout chemin orienté Γ de D , $\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$.

2. THÉORIE DE CAUCHY

Exercice 4 (Lemme de Goursat).

Soit D un ouvert de \mathbb{C} et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe. Soit T un triangle (plein) inclus dans le domaine D . On notera p son périmètre. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

- En considérant les quatre triangles obtenus en traçant les segments entre deux milieux de côtés de T , montrer que pour l'un de ces triangles noté T_1 ,

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_1} f(z) dz \right|.$$

- En itérant cette construction, montrer que pour tout n , il existe un triangle $T_n \subset T_{n-1}$ de périmètre $\frac{p}{2^n}$ tel que

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_1} f(z) dz \right|.$$

- Montrer que l'intersection des T_n est un point c de D .
- Montrer qu'il existe une fonction continue h sur D nulle en c telle que pour tout $z \in D$,

$$f(z) = f(c) + (z - c)f'(c) + (z - c)h(z).$$

- Calculer $\int_{\partial T_n} f(c) dz$ et $\int_{\partial T_n} (z - c)f'(c) dz$.

6. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que pour $n \geq N$,

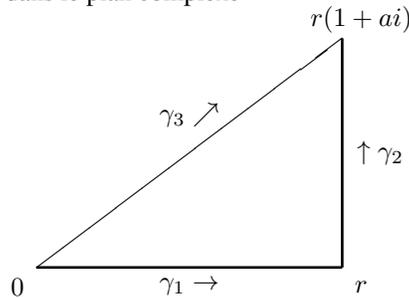
$$\left| \int_{\partial T_n} (z - c)h(z)dz \right| \leq \left(\frac{p}{2n}\right)^2 \epsilon.$$

7. Conclure.

8. Montrer en choisissant un découpage de T avec un petit triangle autour de a que si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est une application continue et holomorphe sur $D - \{a\}$, alors pour tout triangle de sommet a dans D , $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

Exercice 5 (Calcul d'intégrales par chemin fermé).

Soit a un nombre réel tel que $|a| \leq 1$. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^{-z^2}$ et pour tout réel strictement positif r , les chemins suivants dans le plan complexe



1. Calculer $\int_{\gamma_1} f(z)dz$.

2. Montrer que $|\int_{\gamma_2} f(z)dz| \leq \frac{1}{r}$.

3. En déduire

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+ai)t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{1+ia}.$$

4. En déduire les valeurs des intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$.

Exercice 6 (Calcul d'intégrales par la formule intégrale de Cauchy).

Calculer

$$\int_{\partial \Delta_2} \frac{e^z}{(z-3)^2} dz, \int_{\partial \Delta_2} \frac{e^z}{(z+1)} dz \text{ et } \int_{\partial \Delta_2} \frac{e^z}{(z+1)(z-3)^2} dz.$$

3. APPLICATIONS

Exercice 7 (Calcul d'intégrales et théorème de Liouville).

1. Soit $r > 0$ et D un voisinage ouvert de $\overline{\Delta_r}$. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit a et b deux points distincts dans Δ_r . Calculer

$$\int_{\partial \Delta_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)(\zeta - b)} d\zeta.$$

2. En déduire le théorème de Liouville : Toute fonction holomorphe bornée sur \mathbb{C} est constante.

Exercice 8.

- Déterminer toutes les fonctions holomorphes définies sur le plan complexe tout entier vérifiant : $|f(z)| \geq 1$.
- On considère une fonction f holomorphe dans le disque unité, vérifiant $|f(z)| \leq 1$, que peut on dire de $|f'(0)|$?
- Soit n_0 un nombre entier naturel et f une fonction holomorphe définie sur le plan complexe tout entier vérifiant $|f(z)| \leq |z|^{n_0}$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n_0 .
- Soient Ω un ouvert connexe et D une droite, f une fonction continue sur Ω , holomorphe sur la restriction $\Omega - \{D\}$. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω tout entier.