Fonctions holomorphes (HOLO)

Feuille de TD n°4
Logarithmes et intégration sur les chemins du plan complexe

On rappelle que $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} / Im(z) = 0$ et $re(z) \leq 0\}$ et que $\log$ désignera la branche principale du logarithme définie sur $\mathbb{C}^-$ à valeurs dans $B := \{z \in \mathbb{C} / -\pi < Im(z) < \pi\}$.

1. Applications logarithmes

Exercice 1 (Une autre application logarithme ?)**.**

On considère l'application

$$L : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}, re(z) = 0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & \frac{1}{2}\log_{\mathbb{R}}(x^2 + y^2) + i\arctan(\frac{y}{x}). \end{array}$$

1. Montrer que L est holomorphe.
2. L'application L coïncide-t-elle avec la branche principale $\log$ du logarithme sur $\{z \in \mathbb{C}, re(z) > 0\}$?
3. L'application L est-elle un logarithme sur $\{z \in \mathbb{C}, re(z) < 0\}$?

Exercice 2 (Propriétés de la branche principale du logarithme)**.**

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ le nombre complexe $\exp(z)$ est-il dans $\mathbb{C} - \mathbb{C}^-$?
2. Vérifier que $\exp : B \to \mathbb{C}^-$ et $\log : \mathbb{C}^- \to B$ sont deux biholomorphismes réciproques.
3. A-t-on pour tous $z, w \in \mathbb{C}^-$,
$$\log(zw) = \log z + \log w?$$
4. A-t-on pour tous $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $re(z) > 0$ et $re(w) > 0$,
$$\log(zw) = \log z + \log w?$$

Exercice 3 (La fonction zeta de Riemann)**.**

On rappelle que pour tout entier naturel n, et tout nombre complexe z, n^z désigne $p_z(n) = \exp(z \log n)$.

1. Déterminer le module de n^z.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge normalement sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} / re(z) > 1\}$.

2. Intégrales sur les chemins du plan complexe

Exercice 4 (Pour apprendre le cours)**.**

1. Soit $I = [a, b]$ ($a < b$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\phi : I \to \mathbb{C}$ une application continue. Montrer que
$$\left| \int_a^b \phi \right| \leq \int_a^b |\phi|.$$
On pourra considérer un nombre complexe c tel que $\left| \int_a^b \phi \right| = c \int_a^b \phi$.
2. Vérifier que la relation définie sur les chemins paramétrés par $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ s'il existe une bijection $\alpha : J \to I$ dérivable à dérivée continue et partout strictement positive telle que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$ est une relation d'équivalence.
3. Donner l'exemple de D un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ une application continue, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma_1 : I \to D$ une application continue, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha : J \to I$ une application continue bijective et $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$ tels que
$$\int_I f(\gamma_1(t))dt \neq \int_J f(\gamma_2(\tau))d\tau.$$
4. Donner l'exemple d'une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe et de deux chemins Γ_1 et Γ_2 de même origine et fin, tels que
$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz \neq \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$
5. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ une application continue, Γ un chemin dans D. A-t-on
$$re\left(\int_\Gamma f(z)dz\right) = \int_\Gamma re(f(z))dz?$$

Exercice 5 (Calcul d'intégrales)**.**

On paramètre le cercle C_r de centre 0 et de rayon $r > 0$ orienté dans le sens trigonométrique du plan complexe en définissant pour $t \in \mathbb{R}$, $\xi(t)$ comme le point d'intersection de la droite d'équation $y = t(x + r)$ avec le cercle C_r différent de $-r$.

1. Montrer que $\xi(t) = r\frac{1+it}{1-it}$.
2. Vérifier que ξ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}$.
3. En déduire que
$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$
4. En déduire que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$