

1. ETUDE D'APPLICATIONS HOLOMORPHES

Exercice 1 (conservation des angles).

On considère l'application $f : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^2$.

1. Montrer que f conserve les angles.
2. Soit a un nombre réel non nul. Montrer que l'image de la droite d'équation $x = a$ est incluse dans la parabole d'équation $v^2 = 4a^2(a^2 - u)$. Représenter cette parabole pour $a = 1$ et $a = 2$.
3. Soit b un nombre réel non nul. Déterminer une parabole contenant l'image de la droite d'équation $y = b$. Représenter cette parabole pour $b = 1$ et $b = 2$.
4. Vérifier l'orthogonalité aux points d'intersection des quatre paraboles.

Exercice 2 (conservation des angles).

On considère l'application $f : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

1. Déterminer le lieu où f préserve les angles.
2. Montrer que si on note $r = |z|$, $u = \operatorname{re}(f)$ et $v = \operatorname{im}(f)$, alors

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\frac{x}{r} \text{ et } v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\frac{x}{r}.$$

puis

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1 \text{ et } \frac{u^2}{\frac{x^2}{r^2}} - \frac{v^2}{\frac{y^2}{r^2}} = 1.$$

3. Déterminer l'image par f des cercles de centre o et de rayon 1 et 2.
4. Déterminer l'image par f des segments radiaux $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}t$ et $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}t$, quand t varie dans $]0, 1[$.
5. Montrer que f est surjective.
6. Montrer que l'image réciproque d'un point de $\mathbb{C} - [-1, 1]$ est composée de deux points, l'un dans Δ^\times l'autre dans $\mathbb{C} - \Delta$.
7. Montrer que f est une bijection holomorphe de Δ^\times sur $\mathbb{C} - [-1, 1]$.

2. BIHOMOMPHISMES

Exercice 3 (Applications linéaires fractionnaires).

On rappelle qu'à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $GL(2, \mathbb{C})$, on associe l'application linéaire fractionnaire

$$f_A : \mathbb{C} - \left\{ -\frac{-d}{c} \right\} \longrightarrow \mathbb{C} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

1. Vérifier que $f_{A^{-1}} = f_A^{-1}$.
2. On choisit désormais la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Expliciter le biholomorphisme $h = f_C$ et son inverse h^{-1} .
3. Montrer que

$$1 - |h(z)|^2 = \frac{4\text{Im}(z)}{|z+i|^2}$$

$$\text{Im}(h^{-1}(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}$$

4. En déduire l'image du demi-plan de Poincaré \mathbb{H} par h .

Exercice 4 (Biholomorphismes entre domaines).

On rappelle que $\Delta := \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$ et $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) = 0 \text{ et } \text{Re}(z) \leq 0\}$.

1. Montrer que l'application

$$q : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}^-$$

$$z \longmapsto -z^2$$

est holomorphe et bijective.

2. En déduire une application holomorphe et bijective de Δ sur \mathbb{C}^- .

Exercice 5 (Biholomorphisme de \mathbb{H}).

On rappelle qu'à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{R})$, on associe l'application linéaire fractionnaire

$$h_A : \mathbb{C} - \left\{ -\frac{-d}{c} \right\} \longrightarrow \mathbb{C} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

1. Montrer que h_A envoie \mathbb{H} sur \mathbb{H} .
2. Montrer que pour tout élément z de \mathbb{H} , il existe $A \in SL(2, \mathbb{R})$ tel que $h_A(i) = z$.

3. MODES DE CONVERGENCE

Exercice 6 (Le cas très particulier des polynômes).

Soit d un entier naturel. Montrer qu'une suite de polynômes $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ de degré au plus d converge localement uniformément sur \mathbb{C} si et seulement si les $d + 1$ suites de ses coefficients convergent, si et seulement si, il existe $d + 1$ points c_i de \mathbb{C} tels que les suites $(P_n(c_i))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 7 (Un exemple).

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{z+n}$ converge de façon compacte sur $\mathbb{C} - \{-1, -2, -3, \dots\}$.
2. La convergence est-elle normale ?

4. SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 8 (Calcul de rayon de convergence).

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum 2^{2n} z^{2n}$.
2. Déterminer la limite de $\frac{2^{2(n+1)}}{2^{2n}}$.

Exercice 9 (Opérations sur les rayons de convergence).

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2 .

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur à $\min(R_1, R_2)$ avec égalité si $R_2 \neq R_1$.
2. Montrer que le rayon de convergence de $\sum (a_n b_n) z^n$ est supérieur à $R_1 R_2$.

Exercice 10 (Estimations de reste).

Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $z \in \Delta$,

$$\left| \exp(z) - \sum_0^N \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{2}{(N+1)!}.$$

Exercice 11 (Dérivation).

Montrer que pour tout entier naturel k et tout $z \in \Delta$,

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} z^{n-k}.$$

5. FONCTIONS SPÉCIALES

Exercice 12 (trigonométrie hyperbolique).

On définit $\cosh z$ comme la somme de la série $\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sinh z$ comme la somme de la série $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Déterminer leur rayon de convergence.
2. Exprimer \cosh et \sinh à l'aide de la fonction exponentielle.
3. Démontrer les formules d'addition pour $\cosh(z+w)$ et $\sinh(z+w)$ pour z et w dans \mathbb{C} .
4. Démontrer que pour tous x et y dans \mathbb{R} ,

$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y).$$

Exercice 13 (exponentielle).

1. Trouver la valeur minimale de $|f(z)|$ où $f(z) = e^{z^2}$ sur le disque unité.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $2i \sin(z) = e^{-iz}(e^{2iz} - 1)$. En déduire les zéros de la fonction sinus sur \mathbb{C} et en particulier que la fonction sinus ne s'annule que pour des valeurs réelles.
3. Résoudre dans \mathbb{C} , les équations suivantes : $e^z = -5$; $\sin(z) = 2$.

Exercice 14 (Logarithme).

On considère la branche principale du logarithme, toujours notée \log .

1. Calculer $\log(i)$.
2. Calculer i^i .
3. Démontrer que pour tout α et β fixés dans \mathbb{C} et $z \in \mathbb{C}^-$,

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1} \text{ et } z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta.$$

4. En utilisant la détermination principale du logarithme, on définit les fonctions suivantes :
 - a. $z \mapsto z^{1/2}$
 - b. $z \mapsto (1-z)^{1/3}$.

Déterminer leurs domaines de définition.