

1. GÉNÉRALITÉS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

On rappelle qu'un plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) s'identifie à l'ensemble des nombres complexes : le point M de coordonnées (a, b) est associé au nombre complexe $z = a + ib$. On dit alors que M est le point d'afixe z . On rappelle qu'un nombre complexe $z = a + ib$ a une écriture polaire $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ où r est le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de z et θ un argument de z , c'est à dire une mesure modulo 2π de l'angle de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ où M est le point d'afixe z .

Exercice 1 (Parties réelles et imaginaires).

1. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de l'inverse de z .
2. Soit t un nombre réel et $z = a + ib$ un nombre complexe. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{z-t}{z+t}$.
3. Soit z un nombre complexe. Démontrer que z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.

Exercice 2 (Modules).

1. Soit z et w deux nombres complexes. Démontrer que

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ |z + w|^2 + |z - w|^2 &= 2(|z|^2 + |w|^2) \\ |z + w| &\leq |z| + |w| \\ ||z| - |w|| &\leq |z - w|. \end{aligned}$$

2. Montrer que l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes muni de la distance définie par

$$d(z, w) := |w - z|$$

est un espace métrique, c'est à dire que pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$,

- (a) $d(x, y) \geq 0$
- (b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (c) $d(y, x) = d(x, y)$
- (d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exercice 3 (Arguments).

1. Soit θ et θ' deux nombres réels. En utilisant les formules d'addition pour le calcul de $\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$, montrer que

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$$

2. Soit z et z' deux nombres complexes. Déterminer $\arg(zz')$ en fonction de $\arg(z)$ et $\arg(z')$.
3. En déduire l'écriture polaire de z^n , puis ses parties réelles et imaginaires.
4. Déterminer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

Exercice 4 (Racines).

1. Déterminer les racines carrées et les racines cubiques de i .
2. Déterminer les racines cubiques de 1.
3. Déterminer les racines carrées de $\sqrt{3} + 3i$.
4. Résoudre les équations $z^2 + 2z - 2 + 4i = 0$ et $z^6 - z^3 + 1 = 0$.

2. TOPOLOGIE

Dans l'espace métrique $(\mathbb{C}, | \cdot |)$, si z est un nombre complexe et ε un nombre réel positif, on notera $B(z, \varepsilon)$, la boule de centre z et de rayon ε , c'est à dire

$$B(z, \varepsilon) := \{w \in \mathbb{C}, d(z, w) < \varepsilon\}.$$

Un sous-ensemble U de l'espace métrique $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ est dit *ouvert* si pour tout point u de U il existe un réel strictement positif ε tel que la boule $B(u, \varepsilon)$ soit complètement incluse dans U .

Un sous-ensemble F de l'espace métrique $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ est dit *fermé* si son complémentaire est ouvert.

L'*intérieur* $\overset{\circ}{A}$ d'une partie A de l'espace métrique $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ est le plus grand ouvert contenu dans A , ou encore la réunion de tous les ouverts contenus dans A .

L'*adhérence* \bar{A} d'une partie A de l'espace métrique $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ est le plus petit fermé contenant A , ou encore l'intersection de tous les fermés contenant A .

Le *bord* ∂A d'une partie A de l'espace métrique $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ est $\partial A := \bar{A} - \overset{\circ}{A}$.

Une partie A de l'espace métrique $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ est dite *connexe* si elle ne peut pas s'écrire comme réunion de deux ouverts non vides disjoints.

Exercice 5 (Intérieur, adhérence).

Soit A une partie de l'espace métrique $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ et z un nombre complexe.

1. Montrer que z appartient à $\overset{\circ}{A}$ si et seulement si il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, \varepsilon)$ soit incluse dans A .
2. Montrer que z appartient à \bar{A} si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, la boule $B(z, \varepsilon)$ rencontre A .

Exercice 6 (Connexité).

Le but de cet exercice est de montrer qu'une partie P ouverte de \mathbb{C} est connexe si et seulement si pour tout couple (a, b) de points de P il existe une ligne polygonale incluse dans P qui joint a et b .

1. On suppose d'abord que pour tout couple (a, b) de points de P il existe une ligne polygonale incluse dans P qui joint a et b . Supposons que P n'est pas connexe. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints A et B , un point a de A , un point b de B tel que le segment $[ab]$ soit inclus dans P .
2. Noter

$$\begin{aligned}\alpha &:= \{t \in [0, 1] \mid ta + (1-t)b \in A\} \\ \beta &:= \{t \in [0, 1] \mid ta + (1-t)b \in B\}\end{aligned}$$

Montrer que α et β sont non vides ouverts et disjoints et utiliser la connexité de $[0, 1]$ pour obtenir une contradiction.

3. On suppose réciproquement que P est connexe et on fixe un point o de P . On considère

$$A := \{b \in P \mid \text{il y a une ligne polygonale incluse dans } P \text{ qui joint } o \text{ et } b\}.$$

Montrer que A est ouvert dans P , en montrant que pour tout point b de A , il existe une boule $B(b, \varepsilon)$ incluse dans A .

4. Avec les notations précédentes, montrer que $P - A$ est ouvert dans P , en montrant que pour tout point z de $P - A$ et toute boule $B(z, \varepsilon)$ incluse dans P , $B(z, \varepsilon)$ est incluse dans $P - A$.
5. Conclure.