UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

EXAMEN DU 3 MAI 2019
(2 HEURES)

Nous recommandons de bien rédiger vos réponses, même partielles, plutôt que de traiter beaucoup de questions. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. Cependant, si vous ne parvenez pas à donner de démonstration complète, donnez une stratégie de démonstration, en indiquant les théorèmes utilisés et en précisant qu'il manque des détails. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement.

Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie... Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Bon travail.

On rappelle que

- $\Delta := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ est le disque unité ouvert ; son bord orienté dans le sens trigonométrique est $\partial\Delta := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$,
- pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, +\infty[$, $\Delta_r(a) := \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r. Si le centre est 0, on l'omettra dans la notation $\Delta_r := \Delta_r(0)$.
- et $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré.

Exercice 1 (Questions de cours, 6 points)**.**

1. Calculer les intégrales $\int_{\partial\Delta} \frac{dz}{z}$ et $\int_{\partial\Delta} \frac{dz}{z-2}$ à l'aide d'un paramétrage et d'un développement en séries entières, sans utiliser les théorèmes généraux.
2. Énoncer le lemme de Goursat.
3. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Donner la définition d'un logarithme de f.
4. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe qui admet un logarithme g sur D. Donner l'exemple d'un autre logarithme de f. Montrer que f n'a pas de zéro dans D et calculer la dérivée complexe de g.
5. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point de D. Soit $f : D - \{a\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Définir le résidu de f en a.
6. Définir l'indice d'un point par rapport à un chemin fermé orienté dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 (Applications entières, 4 points)**.**

Existe-t-il une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe non constante et bi-périodique de périodes 1 et i i.e.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z+1) = f(z+i) = f(z).$$

Si oui, donner un exemple. Si non, démontrer la non-existence d'une telle application.

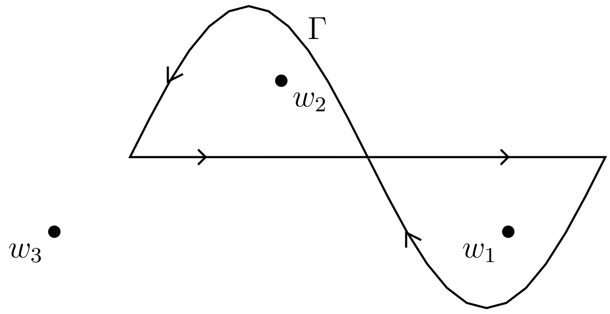
Exercice 3 (Applications proportionnelles, 5 points)**.**

Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé. Soient f et g deux applications holomorphes sur D telles que pour tout $z \in \partial\Delta$, $|f(z)| = |g(z)|$.

1. On suppose que f et g n'ont pas de zéro dans D. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $f = \lambda g$ sur D.
2. La conclusion est-elle encore vraie si on ne suppose plus que f et g n'ont pas de zéro dans D ?

Exercice 4 (Singularités, 5 points)**.**

On considère le contour Γ et les points w_1, w_2, w_3 comme sur la figure ci-dessous



Exprimer la valeur des intégrales suivantes à l'aide des nombres complexes w_1, w_2, w_3 :

1. $A = \int_\Gamma \frac{dz}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$.
2. $B = \int_\Gamma \sin(z)dz$.
3. $C = \int_\Gamma \frac{\sin(z)}{(z-w_1)^2}dz$.

Exercice 5 (Localisations de racines, 5 points)**.**

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 6z + 3$.

1. Démontrer que P a ses quatre racines dans le disque Δ_2.
2. Démontrer que P n'admet qu'une racine dans Δ.
3. Démontrer que P n'admet pas de racine dans $\Delta_{\frac{1}{3}}$.
4. Soit a la racine de P dans le disque Δ. Démontrer que

$$a = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{4z^3 + 6}{z^4 + 6z + 3} z dz.$$

Un corrigé sera disponible sur la page du cours.