UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

EXAMEN DU 3 MAI 2019-CORRIGÉ (2 HEURES)

On rappelle que

- $\Delta := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ est le disque unité ouvert; son bord orienté dans le sens trigonométrique est $\partial\Delta := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$,
- pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, +\infty[$, $\Delta_r(a) := \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r. Si le centre est 0, on l'omettra dans la notation $\Delta_r := \Delta_r(0)$.
- et $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré.

Exercice 1 (Questions de cours, 6 points)**.**

1. Calculer les intégrales $\int_{\partial\Delta} \frac{dz}{z}$ et $\int_{\partial\Delta} \frac{dz}{z-2}$ à l'aide d'un paramétrage et d'un développement en séries entières, sans utiliser les théorèmes généraux.
2. Énoncer le lemme de Goursat.
3. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Donner la définition d'un logarithme de f.
4. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe qui admet un logarithme g sur D. Donner l'exemple d'un autre logarithme de f. Montrer que f n'a pas de zéro dans D et calculer la dérivée complexe de g.
5. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point de D. Soit $f : D - \{a\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Définir le résidu de f en a.
6. Définir l'indice d'un point par rapport à un chemin fermé orienté dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 (Applications entières, 4 points)**.**

Existe-t-il une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe non constante et bi-périodique de périodes 1 et i i.e.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z + 1) = f(z + i) = f(z).$$

Si oui, donner un exemple. Si non, démontrer la non-existence d'une telle application.

Une telle application serait majorée en module par le maximum du module de ses valeurs sur le carré compact délimité par les points d'affixes $0, 1, 1 + i, i$. Elle serait donc entière et bornée donc constante, par le théorème de Liouville. Il n'y a donc pas de telle application.

Exercice 3 (Applications proportionnelles, 5 points)**.**

Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé. Soient f et g deux applications holomorphes sur D telles que pour tout $z \in \partial\Delta$, $|f(z)| = |g(z)|$.

1. On suppose que f et g n'ont pas de zéro dans D. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $f = \lambda g$ sur D.

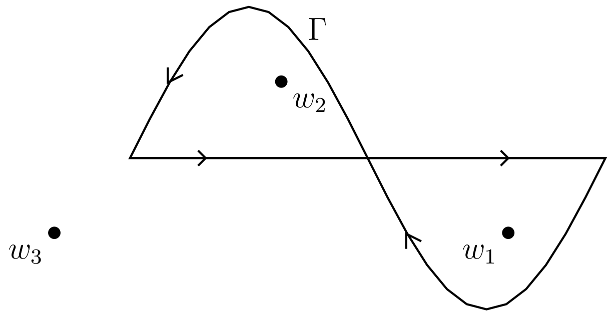
   Sous cette hypothèse, on peut considérer les applications holomorphes sur D, f/g et g/f. Elles sont majorées en module par 1 sur le disque unité, et donc aussi sur le disque fermé par le principe du maximum. Elles sont donc toutes les deux de module 1 sur le disque unité, et donc constantes sur le disque unité par le théorème de l'application ouverte. Par connexité de D, elles sont constantes sur D. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda g$ sur D. Par égalité des modules, on conclut que $|\lambda| = 1$.

2. La conclusion est-elle encore vraie si on ne suppose plus que f et g n'ont pas de zéro dans D ?

   Non, les applications $z \mapsto z$ et $z \mapsto z^2$ sont de même module sur le disque unité, mais ne sont pas proportionnelles.

Exercice 4 (Singularités, 5 points)**.**

On considère le contour Γ et les points w_1, w_2, w_3 comme sur la figure ci-dessous



Exprimer la valeur des intégrales suivantes à l'aide des nombres complexes w_1, w_2, w_3 :

1. $A = \int_\Gamma \frac{dz}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$.

   On note d'abord que les indices de w_1, w_2, w_3 par rapport à Γ sont respectivement $-1, 1$ et 0. L'application $\mathbb{C} - \{w_1, w_2, w_3\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en w_1, w_2, w_3 de résidu respectif $\lim_{z\to w_1}(z - w_1)\frac{1}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)} = \frac{1}{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}, \frac{1}{(w_2-w_1)(w_2-w_3)}, \frac{1}{(w_3-w_1)(w_3-w_2)}$. Par le théorème de Cauchy,

$$\begin{aligned} A &= 2i\pi\left(Ind_\Gamma(w_1)Res_{w_1}(f) + Ind_\Gamma(w_2)Res_{w_2}(f) + Ind_\Gamma(w_2)Res_{w_3}(f)\right) \\ &= 2i\pi\left(-\frac{1}{(w_1-w_2)(w_1-w_3)} + \frac{1}{(w_2-w_1)(w_2-w_3)} + 0\right) \\ &= \frac{2i\pi(w_1+w_2-2w_3)}{(w_2-w_1)(w_1-w_3)(w_2-w_3)} \end{aligned}$$

2. $B = \int_\Gamma \sin(z)dz$.

   L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sin z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ étoilé : son intégrale sur le chemin fermé Γ est donc nulle.

3. $C = \int_\Gamma \frac{\sin(z)}{(z-w_1)^2}dz$.

   Par le théorème de Cauchy pour les dérivées,

$$C = 2i\pi Ind_\Gamma(w_1)\sin'(w_1) = -2i\pi\cos(w_1).$$

Exercice 5 (Localisations de racines, 5 points)**.**

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 6z + 3$.

1. Démontrer que P a ses quatre racines dans le disque Δ_2.

Sur le bord de Δ_2
$$|P(z) - z^4| = |6z + 3| \leq 6 \times 2 + 3 = 15 < 16 = 2^4 = |z|^4.$$
Par le théorème de Rouché, P de degré 4 a donc, comme $z \mapsto z^4$ ses quatre racines dans Δ_2.

2. Démontrer que P n'admet qu'une racine dans Δ.

Sur le bord de Δ
$$|P(z) - (6z + 3)| = |z^4| = 1 < 6 - 3 \leq |6z| - 3 \leq |6z + 3|.$$
Par le théorème de Rouché, le polynôme P n'a, comme $z \mapsto 6z + 3$ qu'une racine dans Δ.

3. Démontrer que P n'admet pas de racine dans $\Delta_{\frac{1}{3}}$.

Sur le bord de $\Delta_{\frac{1}{3}}$
$$|P(z) - (6z + 3)| = |z^4| = \frac{1}{81} < 3 - 6/3 = 3 - |6z| \leq |6z + 3|.$$
Par le théorème de Rouché, le polynôme P n'a, comme $z \mapsto 6z + 3$ aucune racine dans $\Delta_{\frac{1}{3}}$.

4. Soit a la racine de P dans le disque Δ. Démontrer que
$$a = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{4z^3 + 6}{z^4 + 6z + 3} z dz.$$

Par la question 2, $z \mapsto \frac{4z^3+6}{z^4+6z+3} z$ est méromorphe sur $\Delta_{1+\epsilon}$ avec comme seul pôle un point a. Le résidu en a de P'/P est la multiplicité 1 de a comme zéro de P. Par conséquent, le résidu en a de $\frac{4z^3+6}{z^4+6z+3} z$ est a. La formule demandée résulte donc du théorème des résidus.