Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

M. Coste

Agrégation 2003 – Mathématiques générales

Corrigé rédigé par Michel Coste*

Première partie
Généralités

I.1

I.1.a

On a $T_\lambda = v(U_\lambda)$.

I.1.b

On a $t = u$ donc $U_\lambda = T_\lambda = v(U_\lambda)$.

I.1.c

D'après I.1.b, U_λ est stable par v et donc v induit un endomorphisme de U_λ. Puisque v est diagonalisable, son polynôme minimal Π_v est scindé à racines simples. Comme Π_v est polynôme annulateur de la restriction de v à U_λ, cette restriction est diagonalisable.

I.2

Soit $u \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre k. Alors $X^k - 1$ est un polynôme annulateur de u, et il est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc u est diagonalisable.

I.3

On raisonne par récurrence sur la dimension de l'espace V : on suppose que le résultat est démontré pour tout ensemble d'endomorphismes d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $< \dim(V)$, formé d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Ou bien tous les éléments de X sont des homothéties, auquel cas n'importe quelle base de V diagonalise tous les éléments de X. Ou bien il existe u dans X qui n'est pas une homothétie. L'espace V est somme directe de ses sous-espaces propres U_λ pour u, qui sont tous de dimension $< \dim(V)$. Chaque $v \in X$ induit un endomorphisme diagonalisable $v|_{U_\lambda}$ de U_λ d'après I.1.c, et ces restrictions commutent deux à deux. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut donc trouver une base de U_λ qui diagonalise toutes les restrictions d'éléments de X. En mettant bout à bout ces bases pour toutes les valeurs propres λ de u, on obtient une base de V qui diagonalise tous les éléments de X.

I.4

L'application

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Merci à Laurent Moret-Bailly pour ses remarques est un isomorphisme du groupe additif de $\mathbb{C}$ sur un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Ce sous-groupe n'est pas diagonalisable, puisqu'aucun de ses éléments, sauf l'identité, ne l'est.

I.5

On fait la moyenne : on pose

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} \Psi(u(x), u(y)) ,$$

où $|G|$ désigne le cardinal de G. On vérifie immédiatement que Φ est une forme hermitienne définie positive, et par construction de Φ on a $\Phi(u(x), u(y)) = \Phi(x,y)$ pour tout $u \in G$.

I.6

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'après I.5, il existe une forme hermitienne définie positive Φ sur $\mathbb{C}^n$ telle que tous les éléments de G soient unitaires pour Φ. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à une base orthonormale pour Φ. Pour tout $A \in G$, la matrice $P^{-1}AP$ est donc unitaire. Le sous-groupe $P^{-1}GP$ conjugué de G est donc un sous-groupe de U_n.

Deuxième partie

Le cas où n vaut 2

IIA

IIA.1

On fixe une base orthonormée de V, ce qui permet d'identifier les endomorphismes hermitiens aux éléments de U_2.

IIA.1.a

La dimension de E sur $\mathbb{R}$ est 3. Une base de E sur $\mathbb{R}$ est donnée par les matrices

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} .$$

En effet, toute matrice de E s'écrit :

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + i\gamma \\ \beta - i\gamma & -\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ réels.}$$

IIA.1.b

Avec les notations ci-dessus, on a $q(x) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, ce qui prouve que q est une forme quadratique définie positive et que (e, f, g) est une base orthonormée pour q.

IIA.1.c

On a, avec les notations évidentes, $B(x, x') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$. A la recherche d'une expression plus intrinsèque, on vérifie immédiatement que $B(x, x') = \mathrm{trace}(xx')$.

IIA.2

Puisque $a \in \mathrm{U(V)}$ et que x est hermitienne, on a $(axa^{-1})^* = (a^{-1})^* x^* a^* = axa^{-1}$, donc axa^{-1} est hermitienne. Puisque deux matrices semblables ont même trace, on a $\mathrm{trace}(axa^{-1}) = 0$. Donc $\varphi(a)(x) = axa^{-1}$ appartient à E.

IIA.3

Puisque deux matrices semblables ont même déterminant, on a $q(\varphi(a)(x)) = q(x)$. Donc $\varphi(a)$ est une isométrie de q.

IIA.4

IIA.4.a

On raisonne matriciellement (dans une base de V orthonormée pour Φ). Posons $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexes vérifiant $a^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix}$. Soit a dans le noyau de φ. L'égalité $\varphi(a)(e) = e$ entraîne $\beta = 0$ et $\gamma = 0$. Avec cette condition, l'égalité $\varphi(a)(f) = f$ entraîne en plus $\alpha\overline{\delta} = 1$. Il existe donc un réel θ tel que $\alpha = \delta = e^{i\theta}$. Réciproquement, il est clair qu'une matrice $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ est dans le noyau de φ. Le noyau de φ est donc le sous-groupe de $\mathrm{U}(V)$ formé des homothéties $e^{i\theta}\mathrm{Id}_V$. Ce sous-groupe est isomorphe au groupe des nombres complexes de module 1.

On peut donner un argument plus géométrique, comme suit. Si a est dans le noyau de φ, il commute tout élément de E. Si D est une droite quelconque de V, la symétrie orthogonale s d'axe D appartient E. Donc a commute à s et ceci entraîne que a fixe D. Ceci vaut pour toute droite donc a est une homothétie.

IIA.4.b

Soit a dans $\mathrm{U(V)}$. Puisque a est un endomorphisme normal, il diagonalise dans une base orthonormée de V. On fixe une telle base (u, v). La matrice de a dans cette base est $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, avec $|\lambda| = |\mu| = 1$. Si a n'est pas dans le noyau de φ, les deux valeurs propres λ et μ sont distinctes, et les droites propres sont bien déterminées (à permutation près). Posons $\theta = \arg(\lambda/\mu)$. Alors, avec les notations ci-dessus, on a

$$\varphi(a)(e) = e \qquad \varphi(a)(f) = \cos\theta\, f + \sin\theta\, g \qquad \varphi(a)(g) = -\sin\theta\, f + \cos\theta\, g\ .$$

Donc $\varphi(a)$ est la rotation d'axe $\mathbb{R}e$ orienté par e et d'angle θ. Notons que e est la symétrie orthogonale d'axe la droite propre associée à la valeur propre λ. La symétrie orthogonale d'axe la droite propre associée à l'autre valeur propre μ est $-e$; elle engendre la même droite de E. On retiendra que l'axe de $\varphi(a)$ est déterminé par l'ensemble des deux droites propres de a (qui sont orthogonales).

IIA.4.c

Un élément s de E de norme euclidienne 1 (pour q) est un endomorphisme hermitien de V de trace nulle et de déterminant -1. Son polynôme caractéristique est $X^2 - 1$. . C'est donc une symétrie, d'axe $\mathbb{C}u$, parallèlement au vecteur v. Puisque s est hermitien, on a $\Phi(u, v) = \Phi(u, -v) = -\Phi(u, v)$, et donc u et v sont orthogonaux : s est une symétrie orthogonale. Ceci montre que toute droite vectorielle de E est engendrée par une symétrie orthogonale de V (en fait, ceci donne une bijection entre les paires de droites orthogonales de V et les droites de E). Grâce à la discussion de la question IIA.4.b, on en déduit que φ est une surjection sur le groupe des rotations de E.

IIA.5

Tout élément de $\mathrm{U}(V)$ est congru à deux éléments opposés de $\mathrm{SU}(V)$ modulo le noyau de φ. Donc φ induit un homomorphisme surjectif

$$\psi : \mathrm{SU}(V) \longrightarrow \mathrm{SO}(q) ,$$

dont le noyau est $\{\pm \mathrm{Id}_V\}$. Le groupe $\mathrm{SO}(q)$ contient le groupe des rotations G' d'un icosaèdre régulier de E, qui est d'ordre 60. Soit G l'image réciproque de G' par ψ. Le groupe G est d'ordre 120. Soit L un sous-groupe abélien distingué de G. Son image par ψ est un sous-groupe distingué L' de G'. Puisque L est abélien, il est diagonalisable (première partie), et donc tous les éléments de L' sont des rotations de même axe d'après IIA.4.b. Si L' n'est pas réduit à l'identité, cet axe devrait être stable par tous les éléments de G' (car L' est distingué dans G'), ce qui est impossible. Donc $L' = \{\mathrm{Id}_E\}$, et $L = \{\mathrm{Id}_V\}$ ou $L = \{\pm \mathrm{Id}_V\}$. L'indice de L dans $\mathrm{SU}(V)$ est au moins 60.

IIB

IIB.1

IIB.1.a

Si $D \in \mathcal{D}$, c'est que D est une droite propre d'un $u \in G$. Alors $g(D)$ est une droite propre de $gug^{-1} \in G$ (I.1.a) et donc $g(D)$ appartient à $\mathcal{D}$.

IIB.1.b

L'application $(g, D) \mapsto g(D)$ est une action de G sur $\mathcal{D}$. Si g est une homothétie, on a $g(D) = D$ pour toute droite D. Par passage au quotient, l'action de G induit donc une action de H sur $\mathcal{D}$.

IIB.2

IIB.2.a

Par définition, $D \in \mathcal{D}$ est droite propre d'un $u \in G \setminus Z$, et $u(D) = D$. Donc le stabilisateur de D dans H contient la classe de u qui n'est pas l'élément neutre de H. Ceci prouve $e_D \geq 2$.

IIB.2.b

La classe de $u \in G \setminus Z$ dans H est dans le stabilisateur de D si et seulement si D est une droite propre de u. Comme chaque $u \in G \setminus Z$ a deux droites propres, on a

$$2(m-1) = \sum_{D \in \mathcal{D}} (e_D - 1) .$$

IIB.3

Si D et D' sont dans la même orbite, alors le nombre d'éléments de cette orbite est $m/e_D = m/e_{D'}$, d'où $e_D = e_{D'}$ (en fait les deux stabilisateurs sont conjugués dans H).

IIB.4

IIB.4.a

Le nombre d'éléments de l'orbite Ω_i est m/e_i. On a donc

$$2(m-1) = \sum_{D \in \mathcal{D}} (e_D - 1) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{D \in \Omega_i} (e_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} \frac{m}{e_i} (e_i - 1) = m \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{e_i}\right) ,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{e_i}\right)=2\left(1-\frac{1}{m}\right)\ . \qquad (*)$$

IIB.4.b

Puisque $e_i \geq 2$ d'après 2.a, on a

$$2>2\left(1-\frac{1}{m}\right)=\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{e_i}\right)\geq\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{2}=\frac{r}{2}\ .$$

D'autre part, puisque $m \geq 2$,

$$1\leq 2\left(1-\frac{1}{m}\right)=\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{e_i}\right)<r\ .$$

Il ne reste donc que les possibilités $r = 2$ ou $r = 3$.

IIB.5

Remarquons qu'on a $e_i \leq m$. Si $r = 2$, on déduit de l'égalité (*) que $e_1 = e_2 = m$, donc chacune des deux orbites est réduite à une droite. Ainsi $\mathcal{D}$ a deux éléments, et tout élément de G qui n'est pas une homothétie a ces deux droites comme droites propres. Donc G est diagonalisable, et par conséquent abélien.

IIB.6

Si $r = 3$ et $e_1 = e_2 = 2$, l'égalité (*) entraîne que $m = 2e_3$. Le stabilisateur d'un élément D de la troisième orbite est donc d'indice 2 dans H. Soit L l'image réciproque de ce stabilisateur dans G. L'indice de L dans G est 2, donc L est un sous-groupe distingué de G (si $a \in G \setminus L$, alors $aL = G \setminus L = La$). Par ailleurs, tout élément de L admet D pour droite propre (et donc aussi la droite orthogonale à D). On en déduit que L est diagonalisable, et donc abélien. Le groupe G admet donc un sous-groupe abélien distingué d'indice 2.

IIB.7

Les possibilités restantes sont :

- $(e_1, e_2, e_3) = (2, 3, 3)$ et $m = 12$,
- $(e_1, e_2, e_3) = (2, 3, 4)$ et $m = 24$,
- $(e_1, e_2, e_3) = (2, 3, 5)$ et $m = 60$.

En effet, $(1-\frac{1}{k})+(1-\frac{1}{\ell})+(1-\frac{1}{m}) \geq 2$ si $k = 2$ et $\ell = 3$ et $m \geq 6$, ou $k = 2$ et $m \geq \ell \geq 4$, ou $m \geq \ell \geq k \geq 3$. Dans ls trois cas restants, Z est un sous-groupe distingué abélien d'indice ≤ 60 dans G. On a raisonné juqu'ici avec G sous-groupe fini de $\mathrm{U}(V)$. Comme tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de U_2 (I.6), tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus 60.

Troisième partie
La méthode de Frobenius

IIIA

IIIA.1

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de v. Notons $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ les valeurs propres associées. Soit $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ un vecteur de V. Alors

$$\Phi(v(x), x) = \Phi(\sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_j e_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j) = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \overline{\gamma_j} \ .$$

Remarquons que $\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 = \Phi(x, x)$ est strictement positif car x est non nul. Soit C le cône épointé formé des nombres complexes de la forme $re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in [-\tau, \tau]$. Comme C est convexe et que chaque $\overline{\gamma}_j$ appartient à C, $\Phi(v(x), x)/\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2$ appartient à C, et $\Phi(v(x), x)$ aussi.

IIIA.2

IIIA.2.a

On sait que $T_\lambda = v(U_\lambda)$ (I.1.a). Tout vecteur de T_λ peut s'écrire sous la forme $v(x)$ avec $x \in U_\lambda$. Si $x \neq 0$, d'après IIIA.1 on a $\Phi(v(x), x) \neq 0$ et donc $v(x) \notin U_\lambda^\perp$. On conclut que $T_\lambda \cap U_\lambda^\perp = \{0\}$. Puisque la somme des dimensions des deux sous-espaces est n, T_λ et $U_\lambda^\perp$ sont supplémentaires.

IIIA.2.b

Puisque u et t commutent, T_λ est stable par u. Par ailleurs $U_\lambda^\perp$ est aussi stable par u. Soit $x \in U_\lambda$. On le décompose en $x = y + z$ avec $y \in T_\lambda$ et $z \in U_\lambda^\perp$. Alors $u(y) \in T_\lambda$, $u(z) \in U_\lambda^\perp$, et

$$u(y) + u(z) = u(x) = \lambda x = \lambda y + \lambda z \ .$$

On en déduit $u(z) = \lambda z$, donc $z \in U_\lambda^\perp \cap U_\lambda = \{0\}$. Ainsi $x = y \in T_\lambda$. On a montré $U_\lambda \subset T_\lambda$, d'où l'égalité $U_\lambda = T_\lambda$ puisque les deux sous-espaces ont même dimension. Ceci est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme t et u sont diagonalisables, il suit que $t = u$. Ceci veut dire que u et v commutent.

IIIA.3

Soit y un vecteur propre de vs^{-1} de valeur propre associée μ. En posant $x = s^{-1}(y)$, on a donc $v(x) = \mu s(x)$. D'après IIIA.1, on a

$$\Phi(v(x), x) = re^{i\alpha} \quad \text{et} \quad \Phi(s(x), x) = r'e^{i\alpha'} \quad \text{avec} \quad r, r' > 0 \quad \text{et} \quad \alpha, \alpha' \in [-\tau, \tau] \ .$$

Par ailleurs, $\Phi(v(x), x) = \Phi(\mu s(x), x) = \overline{\mu}\Phi(s(x), x)$. Comme $|\mu| = 1$, on en tire $\mu = e^{i(\alpha - \alpha')}$. On a donc bien $\mu = e^{i\beta}$ avec $\beta \in [-2\tau, 2\tau]$.

IIIA.4

Remarquons d'abord que pour tout $t \in \mathrm{U}(V)$ et tout $g \in \mathrm{End}(V)$, on a $N(gt) = N(g)$. En effet,

$$\mathrm{trace}((gt)^* gt) = \mathrm{trace}(gt(gt)^*) = \mathrm{trace}(gg^*) = N(g) \ .$$

On a donc, puisque $uv \in \mathrm{U}(V)$,

$$N(vuv^{-1}u^{-1} - \mathrm{Id}_V) = N(vu - uv) = N(v(u - \mathrm{Id}_V) - (u - \mathrm{Id}_V)v) \ .$$

Exprimons cette dernière quantité en prenant des matrices dans une base orthonormée de vecteurs propres pour v. Soient $a_{i,j}$ les coefficients de la matrice de $u - \mathrm{Id}_V$, et γ_i les coefficients diagonaux de la matrice de v. Les coefficients de la matrice de $v(u - \mathrm{Id}_V) - (u - \mathrm{Id}_V)v$ sont $a_{i,j}(\gamma_i - \gamma_j)$. On a $|\gamma_i - \gamma_j| \leq 2\sin(\tau)$. Donc

$$N(v(u - \mathrm{Id}_V) - (u - \mathrm{Id}_V)v) = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 |\gamma_i - \gamma_j|^2 \leq 4\sin^2(\tau) \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 = 4\sin^2(\tau) N(u - \mathrm{Id}_V) \; .$$

On obtient bien

$$N(vuv^{-1}u^{-1} - \mathrm{Id}_V)) \leq 4\sin^2(\tau) N(u - \mathrm{Id}_V) \; .$$

IIIB

IIIB.1

IIIB.1.a

Par définition de S, et vu que S est fini, il existe $\tau \in [0, \pi/6[$ tel que pour tout $v \in S$ et toute valeur propre σ de v, il existe $\alpha \in [-\tau, \tau]$ tel que $\sigma = e^{i\alpha}$. D'après IIIA.4, on a pour tout entier naturel k

$$N(u_{k+1} - \mathrm{Id}_V) \leq 4\sin^2(\tau) N(u_k - \mathrm{Id}_V) \; .$$

Comme $4\sin^2(\tau) < 1$, la suite $(N(u_k - \mathrm{Id}_V))_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. Puisque les u_k sont dans G, cette suite ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Elle est donc constamment nulle à partir d'un certain rang. Ceci veut dire que $u_k = \mathrm{Id}_V$ à partir d'un certain rang.

IIIB.1.b

Remarquons déjà qu'il existe $\tau' \in [0, \pi/2[$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, toute valeur propre λ de u_k soit de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\tau', \tau']$. En effet, d'après l'hypothèse sur u, on peut trouver un τ' qui remplisse la condition pour les valeurs propres de $u_0 = u$. On peut supposer $\tau' \geq \pi/3$. Comme v et $u_k v^{-1} u_k^{-1}$ qui est conjugué à v^{-1} ont toutes leur valeurs propres de la forme $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in]-\pi/6, \pi/6[$, d'après IIIA.3 les valeurs propres de u_{k+1} sont toutes de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi/3, \pi/3] \subset [-\tau', \tau']$.

Montrons maintenant que pour tout $k \geq 1$, si $u_{k+1} = \mathrm{Id}_V$, alors $u_k = \mathrm{Id}_V$. Dire que $u_{k+1} = \mathrm{Id}_V$ revient à dire que v et u_k commutent, ou aussi, puisque $u_k = vu_{k-1}v^{-1}u_{k-1}^{-1}$, que v et $u_{k-1}v^{-1}u_{k-1}^{-1}$ commutent, ou encore, en passant à l'inverse, que v et $u_{k-1}vu_{k-1}^{-1}$ commutent. On peut appliquer IIIA.2 grâce à la remarque ci-dessus sur les valeurs propres de u_{k-1}. On obtient que u_{k-1} et v commutent, c'est-à-dire que $u_k = \mathrm{Id}_V$.

En utilisant IIIB.1.a et l'implication qu'on vient de démontrer, on arrive à $u_1 = \mathrm{Id}_V$. Ceci veut dire que u et v commutent.

IIIB.2

Prenons la matrice de $h^{-1}g$ dans une base orthonormée de vecteurs propres pour $h^{-1}g$. Notons $\sigma_j = e^{i\alpha_j}$ les coefficients diagonaux de cette matrice ; les σ_j sont les valeurs propres de $h^{-1}g$. On a

$$N(g - h) = N(h^{-1}g - \mathrm{Id}_V) = \sum_{j=1}^{n} |e^{i\alpha_j} - 1|^2 = \sum_{j=1}^{n} 4\sin^2(\alpha_j/2) \; .$$

Donc, pour chaque j, on a $4\sin^2(\alpha_j/2) \leq N(g - h)$. On en déduit que si $N(g - h) < 4\sin^2(\pi/12)$, on peut prendre $\alpha_j \in]-\pi/6, \pi/6[$ pour $j = 1, \ldots, n$. Posons

$$\eta = 4\sin^2(\pi/12) = 2(1 - \cos(\pi/6)) = 2 - \sqrt{3} \; .$$

On vient de montrer que $N(g - h) < \eta$ entraîne $h^{-1}g \in S$.

IIIB.3

Soit $(g_1, \ldots, g_\nu)$ un système de représentants de G/A dans G (ν est l'indice de A dans G). On a en particulier $g_i g_j^{-1} \notin S$ pour tout couple (i, j) d'indices distincts. On en déduit $N(g_i - g_j) \geq \eta$, d'après IIIB.2. Les intérieurs des boules B_j de centres les g_i et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{\eta}$ dans E sont donc disjoints. Comme chaque élément de $\mathrm{U}(V)$, les g_i vérifient $N(g_i) = n$, c'est-à-dire $\|g_i\| = \sqrt{n}$. Les intérieurs des boules B_j sont donc tous contenus dans la différence entre les boules de E de centre l'origine et de rayons respectivement $\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{\eta}$ et $\sqrt{n} - \frac{1}{2}\sqrt{\eta}$. Le volume de cette différence de boules est donc supérieur ou égal à ν fois le volume d'une boule de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{\eta}$. Puisque la dimension de E sur $\mathbb{R}$ est $2n^2$ (la dimension de $\mathrm{End}(V)$ sur $\mathbb{C}$ est n^2), le volume d'une boule de rayon R dans E est mR^{2n^2}, où m est le volume de la boule unité de E. On a donc

$$\nu m \left(\frac{1}{2}\sqrt{\eta}\right)^{2n^2} \leq m\left(\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{\eta}\right)^{2n^2} - m\left(\sqrt{n} - \frac{1}{2}\sqrt{\eta}\right)^{2n^2} .$$

On en tire

$$\nu \leq \left(2\sqrt{\frac{n}{\eta}} + 1\right)^{2n^2} - \left(2\sqrt{\frac{n}{\eta}} - 1\right)^{2n^2} = a(n) .$$

IIIB.4

Montrons pour conclure que *tout sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$ dans G.* Tout d'abord, on peut grâce à I.6 supposer que G est un sous-groupe de U_n. Il suffit alors, d'après IIIB.3, de montrer que le sous-groupe A défini dans cette section est abélien et distingué dans G. Pour tout $v \in S$ et tout $u \in G$, l'élément conjugué uvu^{-1} a les mêmes valeurs propres que v et est donc dans S. Le sous-groupe A engendré par S est donc distingué dans G. D'après IIIB.1.b, deux éléments quelconques de S commutent. Donc A est abélien. Ceci achève la démonstration.