UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

EXAMEN DE SECONDE SESSION 2018
(2 HEURES)

Nous recommandons de bien rédiger vos réponses, même partielles, plutôt que de traiter beaucoup de questions. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. Cependant, si vous ne parvenez pas à donner une démonstration complète, donnez une stratégie de démonstration, en indiquant les théorèmes utilisés et en précisant qu'il manque des détails. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement.

Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie... Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif.

On rappelle que

- pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, +\infty[$, le disque ouvert de centre a et de rayon r est noté $\Delta_r(a) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$,
- le disque unité ouvert est $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, son bord est $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
- et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré.

Exercice 1 (Conjugaison, 4 points)**.**

Soit f une application holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$.

1. Déterminer le domaine de définition V de l'application $g : z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$.
2. L'application g est-elle holomorphe sur V ?

Exercice 2 (Questions de cours, 4 points)**.**

1. Préciser les groupes entre lesquels l'application exponentielle complexe réalise un morphisme. Rappeler sans démonstration le noyau et l'image de ce morphisme de groupes.
2. Énoncer le lemme de Goursat.
3. Déterminer les pôles de l'application $z \mapsto \frac{z}{(z^2-1)(z^3-1)}$ et leur ordre.
4. Donner la valeur de $\int_{\partial\Delta_2(0)} \frac{z^2}{z+1} dz$.

Exercice 3 (Logarithme, 4 points)**.**

On fixe la branche principale $\log$ du logarithme.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}^-$, l'équation $z^i = 2$.
2. Déterminer l'image du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ par l'application $\log$.

Exercice 4 (Croissance à l'infini, 4 points)**.**

On rappelle la formule de Gutzmer : soit f la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $r < R$,

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

1. Démontrer à l'aide de la formule de Gutzmer que toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bornée est constante.
2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ application holomorphe. On suppose que
$$\forall r \in]0, +\infty[, M(r) := \sup_{|z|\leq r} |f(z)| \leq r^2.$$
Montrer que f est une application polynomiale dont on estimera le degré.

Exercice 5 (Zéros de polynômes, 4 points)**.**

1. Énoncer le théorème de Rouché.
2. Montrer que les zéros du polynôme $p(z) = z^4 - 7z - 1$ sont tous inclus dans le disque ouvert $\Delta_2(0)$ centré en l'origine de rayon 2. On vérifiera soigneusement toutes les hypothèses du théorème utilisé.