Fonctions holomorphes (HOLO)

FEUILLE DE TD N°2
EXERCICES SUR LA $\mathbb{C}$-DÉRIVABILITÉ

1. POUR APPRENDRE LE COURS

Exercice 1 ($\mathbb{C}$-dérivabilité)**.**

1. Écrire en termes d'ε et δ la définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité d'une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ d'un ouvert D de $\mathbb{C}$ en un point a de D.
2. Soit n un entier naturel non nul. Soit a un point de $\mathbb{C}$. Déterminer une fonction $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que sur $\mathbb{C}$,
$$z^n = a^n + (z-a)f_1(z).$$
En déduire que l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ est $\mathbb{C}$-dérivable en a et déterminer sa dérivée en a.
3. Démontrer que si f et g sont deux applications d'un ouvert D de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont $\mathbb{C}$-dérivables en a, alors leur produit est $\mathbb{C}$-dérivable en a. Déterminer alors la dérivée du produit en a à l'aide des dérivées en a de f et de g.
4. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue mais nulle part $\mathbb{C}$-dérivable.

Exercice 2 (Équations de Cauchy-Riemann)**.**

1. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-dérivable en un point a de D. Énoncer les équation de Cauchy-Riemann.
2. Écrire les équations de Cauchy-Riemann pour l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^3$.
3. Donner l'exemple d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ différentiable en tout point et qui ne vérifie en aucun point les équations de Cauchy-Riemann.

Exercice 3 (Holomorphie)**.**

1. Donner l'exmple d'une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$.
2. Vérifier en calculant Δu, que sa partie réelle u est harmonique.

2. À L'AIDE DES ÉQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN

Exercice 4 (Un exemple)**.**

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x+iy \mapsto x^3y^2 + ix^2y^3$ et $g = f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application réelle associée.

1. En quels points de $\mathbb{R}^2$, g est-elle différentiable ?
2. En quels points de $\mathbb{R}^2$, g vérifie-t-elle les équations de Cauchy-Riemann ?
3. En quels points de $\mathbb{C}$, f est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?
4. En quels points de $\mathbb{C}$, f est-elle holomorphe ?

Exercice 5 (Exponentielle)**.**

1. Reprendre l'exercice précédent pour la fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x+iy \mapsto e^x \cos y + ie^x \sin y$.
2. Déterminer la dérivée de cette application, là où elle est $\mathbb{C}$-dérivable.
3. Démontrer ou réfuter : la fonction $f(z) = \exp(\bar{z})$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 (Logarithme)**.**

On considère $D := \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(z) \neq 0.\}$ et l'application

$$\begin{array}{cccc} \ell: & D & \to & \mathbb{C} \\ & z = x+iy & \mapsto & \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\arctan\frac{y}{x}. \end{array}$$

1. Montrer que ℓ est $\mathbb{C}$-dérivable sur D.
2. Déterminer sa dérivée sur D.

Exercice 7 (En coordonnées polaires)**.**

Déterminer les équations de Cauchy Riemann en coordonnées polaires.

3. Fonctions holomorphes

Exercice 8 (Exemples)**.**

Montrer qu'un polynôme $P(z, \overline{z})$ est holomorphe si et seulement aucun monôme ne contient le facteur $\overline{z}$.

Exercice 9 (Fonctions localement constantes)**.**

1. Montrer qu'une fonction holomorphe dur un ouvert D de $\mathbb{C}$ qui ne prend que des valeurs réelles est localement constante.
2. Que dire d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est constante ?
3. Que dire d'une fonction holomorphe $f = u + iv$ sur un ouvert de $\mathbb{C}$ dont la conjuguée $\overline{f} := u - iv$ est aussi holomorphe ?
4. Montrer qu'une fonction holomorphe qui ne prend que des valeurs de module 1 est localement constante. *On pourra montrer que* $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ *puis que* $u(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Exercice 10 (Fonctions harmoniques)**.**

1. Déterminer, si possible, une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = x^2 + y^2$.
2. Déterminer, si possible, une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = x^2 - y^2$.
3. Montrer sans calcul que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto 2xy$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 (Fonctions holomorphes)**.**

1. Déterminer, si possible, une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = e^{-y}\sin(x) - e^{y}\cos(x)$.
2. Déterminer toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = e^{-y}\sin(x) - e^{y}\cos(x)$.

Exercice 12 (Polynômes harmoniques)**.**

Soit $u(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ un polynôme harmonique. Montrer que la fonction

$$p(z) := 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - u(0,0)$$

est holomorphe de partie réelle u.

Exercice 13 (Laplacien)**.**

Soit une fonction holomorphe f définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2 \quad ; \quad \Delta \ln(1+|f|^2) = \frac{4|f'|^2}{(1+|f'|^2)^2}$$