UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

EXAMEN DU 20 AVRIL 2018
(2 HEURES)

Nous recommandons de bien rédiger vos réponses, même partielles, plutôt que de traiter beaucoup de questions. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. Cependant, si vous ne parvenez pas à donner une démonstration complète, donnez une stratégie de démonstration, en indiquant les théorèmes utilisés et en précisant qu'il manque des détails. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement.

Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie... Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif.

On rappelle que

- pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, +\infty[$, le disque ouvert de centre a et de rayon r est
$$\Delta_r(a) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$$
- le disque unité ouvert est $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, son bord est $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
- et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré.

Exercice 1 (Applications harmoniques, 4 points)**.**

Soit $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant. Donner une condition **nécessaire et suffisante** portant sur le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour qu'il existe une application f holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont P est la partie réelle. On écrira alors une application f à l'aide de la variable complexe $z = x + iy$.

Exercice 2 (Questions de cours, 5 points)**.**

On fixe la branche principale log du logarithme.

1. Existe-t-il un nombre complexe z tel que $\log z^2 \neq 2 \log z$?
2. Donner le développement en série entière de la fonction exponentielle centré en 2.
3. Donner si possible l'exemple d'un ouvert D de $\mathbb{C}$ et d'un chemin Γ fermé orienté tracé dans D dont l'intérieur n'est pas totalement inclus dans D.
4. Donner l'exemple d'un chemin Γ fermé orienté tracé dans D et non simple. On donnera (sans justification) l'indice par rapport à Γ de chacun des points de $\mathbb{C} - \Gamma$.
5. Donner l'exemple d'une fonction holomorphe avec une singularité isolée apparente.

Exercice 3 (Annulation, 4 points)**.**

Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé $\overline{\Delta}$. Soit f une application holomorphe sur D telle que $f(0) = 1$ et pour tout $\zeta \in \partial\Delta$, $|f(\zeta)| > 1$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans D.

Tourner s.v.p.

Exercice 4 (Biholomorphisme de $\mathbb{H}$, 5 points)**.**

On considère l'application linéaire fractionnaire de Cayley

$$h_C : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{1\} \\ z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}$$

1. Montrer que h_C réalise un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ sur Δ.
2. Existe-t-il une application holomorphe bornée non constante sur $\mathbb{C}$? et sur $\mathbb{H}$?
3. Déterminer un biholomorphisme entre le premier quadran

$$Q := \{z \in \mathbb{C}/0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$$

et Δ.

Exercice 5 (Calcul d'intégrale, 5 points)**.**

Soit n un entier naturel supérieur à 2. Calculer l'intégrale $I_n := \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ en utilisant le lacet suivant