Fonctions holomorphes (HOLO)

INTERROGATION (1 HEURE 30)

On notera pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}^+$, $\Delta_R(a) := \{z \in \mathbb{C} / |z - a| < R\}$ et $\Delta_R = \Delta_R(0)$.

Exercice 1 (Questions de cours, 4 points)**.**

1. L'application $\mathbb{C} - \{3\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z-3}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} - \{3\}$? Justifier.
2. Donner l'exemple d'un ouvert non étoilé de $\mathbb{C}$. Justifier que l'exemple proposé n'est pas étoilé.

Exercice 2 (Calcul d'intégrales, 5 points)**.**

Calculer

$$\int_{\partial \Delta_1} \frac{\sin(z)}{(z+2)^2} dz \ , \ \int_{\partial \Delta_3} \frac{\sin(z)}{(z+2)^2} dz \text{ et } \int_{\partial \Delta_3} \frac{\sin(z)}{(z+1)^2 (z+2)^2} dz.$$

Exercice 3 (Singularités, 6 points)**.**

1. Soit $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que $\lim_{z \to 0} |f(z)| = +\infty$. Quelle est la nature de la singularité isolée 0 ? (apparente, polaire ou essentielle) Justifier.
2. Donner l'exemple d'une application holomorphe avec une singularité essentielle. Justifier.

Exercice 4 (Applications holomorphes, 5 points)**.**

1. Rappeler la définition de l'indice $Ind_\Gamma(a)$ d'un point a de $\mathbb{C}$ par rapport à un chemin fermé compact orienté Γ de $\mathbb{C}$.
2. On suppose que Γ est paramétré sous la forme $\gamma(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$ où r et θ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $[0,1]$, r à valeurs strictement positives et $r(0) = r(1)$, $\theta(0) \equiv \theta(1) \mod 2\pi$ montrer que
$$Ind_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \theta'(t) dt$$
et correspond donc au nombre de tours, comptés positivement dans le sens direct, que fait Γ autour de a.

Licence 3 — Mathématiques 2017–2018

Fonctions holomorphes (HOLO)

INTERROGATION (1 HEURE 30)

On notera pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}^+$, $\Delta_R(a) := \{z \in \mathbb{C} / |z - a| < R\}$ et $\Delta_R = \Delta_R(0)$.

Exercice 1 (Questions de cours, 4 points)**.**

1. L'application $\mathbb{C} - \{3\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z-3}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} - \{3\}$? Justifier.
2. Donner l'exemple d'un ouvert non étoilé de $\mathbb{C}$. Justifier que l'exemple proposé n'est pas étoilé.

Exercice 2 (Calcul d'intégrales, 5 points)**.**

Calculer

$$\int_{\partial \Delta_1} \frac{\sin(z)}{(z+2)^2} dz \ , \ \int_{\partial \Delta_3} \frac{\sin(z)}{(z+2)^2} dz \text{ et } \int_{\partial \Delta_3} \frac{\sin(z)}{(z+1)^2 (z+2)^2} dz.$$

Exercice 3 (singularités, 6 points)**.**

1. Soit $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que $\lim_{z \to 0} |f(z)| = +\infty$. Quelle est la nature de la singularité isolée 0 ? (apparente, polaire ou essentielle) Justifier.
2. Donner l'exemple d'une application holomorphe avec une singularité essentielle. Justifier.

Exercice 4 (Applications holomorphes, 5 points)**.**

1. Rappeler la définition de l'indice $Ind_\Gamma(a)$ d'un point a de $\mathbb{C}$ par rapport à un chemin fermé compact orienté Γ de $\mathbb{C}$.
2. On suppose que Γ est paramétré sous la forme $\gamma(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$ où r et θ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $[0,1]$, r à valeurs strictement positives et $r(0) = r(1)$, $\theta(0) \equiv \theta(1) \mod 2\pi$ montrer que
$$Ind_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \theta'(t) dt$$
et correspond donc au nombre de tours, comptés positivement dans le sens direct, que fait Γ autour de a.