Licence 3 — Mathématiques 2017–2018

Fonctions holomorphes (HOLO)

INTERROGATION (1 HEURE)

On notera pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}^+$, $\Delta_R(a) := \{z \in \mathbb{C} / |z-a| < R\}$.

Exercice 1 (Séries entières, 4 points)**.**

1. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série entière convergente (avec un rayon de convergence strictement positif). Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n!} z^n$.
2. Soit deux séries entières centrées en 0 de rayon de convergence $R > 0$ et de somme respective f et g. On suppose que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = g(x)$. Montrer que pour tout $z \in \Delta_R(0)$, $f(z) = g(z)$.

Exercice 2 (Questions de cours, 6 points)**.**

1. Rappeler la définition de la branche principale du logarithme.
2. Rappeler la définition d'une primitive d'une fonction continue f sur $\mathbb{C}$.
3. Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui n'admet pas de primitive. Sinon, appliquer un théorème pour montrer que toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ admet une primitive.

Exercice 3 (Une équation, 5 points)**.**

On fixe la branche principale du logarithme. Résoudre dans $\mathbb{C}^-$, l'équation $z^i = -1$.

Exercice 4 (Applications holomorphes, 5 points)**.**

Développer $z \mapsto \frac{z^2+z-1}{z+1}$ en éléments simples et calculer $\int_{\partial\Delta_2(0)} \frac{z^2+z-1}{z+1} dz$.

Licence 3 — Mathématiques 2017–2018

Fonctions holomorphes (HOLO)

INTERROGATION (1 HEURE)

On notera pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}^+$, $\Delta_R(a) := \{z \in \mathbb{C} / |z-a| < R\}$.

Exercice 1 (Séries entières, 4 points)**.**

1. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série entière convergente (avec un rayon de convergence strictement positif). Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n!} z^n$.
2. Soit deux séries entières centrées en 0 de rayon de convergence $R > 0$ et de somme respective f et g. On suppose que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = g(x)$. Montrer que pour tout $z \in \Delta_R(0)$, $f(z) = g(z)$.

Exercice 2 (Questions de cours, 6 points)**.**

1. Rappeler la définition de la branche principale du logarithme.
2. Rappeler la définition d'une primitive d'une fonction continue f sur $\mathbb{C}$.
3. Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui n'admet pas de primitive. Sinon, appliquer un théorème pour montrer que toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ admet une primitive.

Exercice 3 (Une équation, 5 points)**.**

On fixe la branche principale du logarithme. Résoudre dans $\mathbb{C}^-$, l'équation $z^i = -1$.

Exercice 4 (Applications holomorphes, 5 points)**.**

Développer $z \mapsto \frac{z^2+z-1}{z+1}$ en éléments simples et calculer $\int_{\partial\Delta_2(0)} \frac{z^2+z-1}{z+1} dz$.