UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

INTERROGATION (1 HEURE)

On notera pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}^+$, $\Delta_R(a) := \{z \in \mathbb{C}/|z-a| < R\}$ et $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}/im(z) > 0\}$.

Exercice 1 (Questions de cours, 5 points)**.**

1. Rappeler la définition du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$. Montrer que la série $\sum a_n z^n$ diverge sur $\mathbb{C} - \Delta_R(0)$.

Exercice 2 (Une équation, 5 points)**.**

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^6 + 2z^3 - 3 = 0$.

Exercice 3 (Applications holomorphes, 5 points)**.**

Déterminer toutes les applications holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = x^2 - y^2 + 3x^2y - y^3$.

Exercice 4 (Biholomorphismes, 5 points)**.**

Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}/Im(z) > 0\}$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL(2,\mathbb{R})$ (i.e. à coefficients réels et de déterminant 1.) Soit l'application linéaire fractionnaire $f_A : \; z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Montrer que f_A est définie sur $\mathbb{H}$ et réalise un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ dans lui-même.

Licence 3 — Mathématiques 2017–2018

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

INTERROGATION (1 HEURE)

On notera pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}^+$, $\Delta_R(a) := \{z \in \mathbb{C}/|z-a| < R\}$ et $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}/im(z) > 0\}$.

Exercice 1 (Questions de cours, 5 points)**.**

1. Rappeler la définition du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$. Montrer que la série $\sum a_n z^n$ diverge sur $\mathbb{C} - \Delta_R(0)$.

Exercice 2 (Une équation, 5 points)**.**

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^6 + 2z^3 - 3 = 0$.

Exercice 3 (Applications holomorphes, 5 points)**.**

Déterminer toutes les applications holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = x^2 - y^2 + 3x^2y - y^3$.

Exercice 4 (Biholomorphismes, 5 points)**.**

Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}/Im(z) > 0\}$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL(2,\mathbb{R})$ (i.e. à coefficients réels et de déterminant 1.) Soit l'application linéaire fractionnaire $f_A : \; z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Montrer que f_A est définie sur $\mathbb{H}$ et réalise un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ dans lui-même.