UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Agrégation

FEUILLE DE TD N°1 : GROUPES LINÉAIRES

1. GROUPES DE MATRICES / GROUPES LINÉAIRES

Exercice 1 (Groupes de matrices sur $\mathbb{Z}$)**.**

1. La matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est-elle dans $GL(3, \mathbb{Z})$?
2. Soit $M = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Par des opérations élémentaires sur les lignes de M transformer-la en une matrice dont le premier bloc 3×3 est le bloc identité.
3. En déduire l'inverse de la matrice A.

Exercice 2 (Vandermonde)**.**

Soit A un anneau commutatif. Soit $(a, b, c) \in A^3$. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$.

Exercice 3 (Matrice de permutations)**.**

1. Écrire la permutation $(1, 3, 4, 2)$ comme produit de transpositions.
2. Écrire le produit de matrices correspondant.
3. Comparer la signature d'une permutation au déterminant de sa matrice.

Exercice 4 (Représentation matricielle des nombres complexes et des quaternions)**.**

1. Déterminer dans $M(2, \mathbb{R})$ une matrice I telle que $I^2 = -Id$.
2. En déduire un morphisme non nul d'anneaux de $\mathbb{C}$ dans $M(2, \mathbb{R})$.
3. Soit
$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \ \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$
Établir la table de multiplication de $G := \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, -\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}\}$. Est-ce un groupe ? Est-il cyclique ?
4. La sous-algèbre $\mathbb{H}$ de $M(2, \mathbb{C})$ engendré par G est-elle commutative ? un corps gauche ?

Exercice 5 (Groupe unipotent)**.**

1. À quel groupe le groupe U des matrices de la forme $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$ est-il isomorphe ?
2. Est-ce un sous-groupe normal de $SL(2, \mathbb{R})$?
3. Déterminer l'inverse de $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Le groupe spécial unitaire $SU(2)$

Soit $<\ ,\ >$ le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^2$ (i.e la forme sesquilinéaire ($\mathbb{C}$-linéaire par rapport au premier argument et $\mathbb{C}$-anti-linéaire par rapport au second) à symétrie hermitienne définie positive de matrice Id dans la base canonique)

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{C}^2)^2, < X, Y >= {}^tXIdY = {}^tX\overline{Y}.$$

On notera, pour toute matrice $M \in M(2,\mathbb{C})$, $M^\star := {}^t\overline{M}$ l'adjoint de M i.e.

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{C}^2)^2, < MX, Y >=< X, M^\star Y > .$$

On rappelle que le groupe spécial unitaire $SU(2)$ est le sous-groupe du groupe spécial linéaire complexe $SL(2,\mathbb{C})$ des matrices qui respectent le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^2$ i.e.

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{C}^2)^2, < PX, PY >=< X, Y > .$$

$$SU(2) := \{P \in M(2,\mathbb{C}) / \det P = 1 \text{ et } P^\star P = Id\}.$$

Exercice 6 (Le groupe $SO(2)$)**.**

1. Rappeler un isomorphisme de groupes entre $SO(2)$ et S^1.
2. L'application $SO(2) \to SO(2), A \mapsto A^2$ est-elle un morphisme de groupes ? Déterminer son image et son noyau.

Exercice 7 (L'espace V des matrices anti-hermitiennes de trace nulle)**.**

1. Déterminer la nature de l'espace vectoriel V des matrices anti-hermitiennes (i. e. $M^\star := -M$) de $M(2,\mathbb{C})$ de trace nulle.
2. Écrire la forme générale d'une matrice de V à l'aide de trois nombres réels. En déduire une base de V.
3. Montrer que $\ll P, P' \gg := -\frac{1}{2}trace(PP')$ définit un produit scalaire sur V.

Exercice 8 (Le groupe $SU(2)$)**.**

1. Soit $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU(2)$. Montrer que $c = -\overline{b}, d = \overline{a}$ et $\overline{a}a + \overline{b}b = 1$ et écrire la forme générale d'une matrice P de $SU(2)$ à l'aide de deux nombres complexes, puis de quatre nombres réels.
2. En déduire un homéomorphisme de $SU(2)$ sur la sphère unité S^3 de $\mathbb{C}^2$. (On munit ici S^3 de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}^2$ et $SU(2)$ de la topologie induite par la topologie d'une norme sur l'espace vectoriel $M(2,\mathbb{C})$.)
3. Soit $-1 < c < 1$. Décrire topologiquement le sous-espace de $SU(2)$ des matrices de trace c, appelé "latitude c".
4. Montrer que les latitudes sont des classes de conjugaison dans $SU(2)$. (On pourra remarquer que les éléments de $SU(2)$ sont associés à des endomorphismes normaux (i.e. qui commutent avec leur adjoint)).
5. Quelles sont les autres classes de conjugaison ?
6. Décrire topologiquement le sous-groupe D des matrices diagonales de $SU(2)$.

Exercice 9 (Les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$)**.**

1. Montrer que la classe de conjugaison C de $SU(2)$ des matrices de trace nulle (i.e. la latitude 0) est la sphère unité de l'espace euclidien $(V, \ll\ ,\gg)$ des matrices anti-hermitienne de trace nulle.
2. Montrer que $SU(2)$ agit par conjugaison sur l'espace V.
3. Montrer que cette action restreinte à C est transitive.
4. En déduire un morphisme de groupes φ de $SU(2)$ dans le groupe orthogonal de $(V, \ll\ ,\gg)$.
5. Déterminer le noyau de φ.
6. En utilisant la connexité de $SU(2)$ montrer que l'image de φ est incluse dans $SO(V)$.
7. Montrer que l'image par φ du sous-groupe D des matrices diagonales de $SU(2)$ est le sous-groupe des rotations de V qui fixent $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.
8. En déduire l'image de φ.