Repérages

I) Repère et coordonnées

1) Coordonnées cartésiennes

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$

Un <u>repère cartésien</u> de E est la donnée

- d'un point de E
- de $\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$ vecteurs de $\vec{E}$ non nul / non colinéaires / indépendants

Le repère est dit <u>orthonormé</u> si de plus les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.

Le repère est dit <u>direct</u> s'il correspond à l'orientation choisie.

Si $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère cartésien d'un espace euclidien E de dimension 3,

pour tout point M de E, il existe un unique triplet $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Ce triplet constitue les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Si de plus $\mathcal{R}$ est orthonormé, les coordonnées se calculent ~~par~~ avec le produit scalaire

$$x = \vec{OM}\cdot\vec{i}$$

car si $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ alors $\vec{OM}\cdot\vec{i} = x1 + y0 + z0 = x$

Si $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est un autre repère, alors les coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de M dans $\mathcal{R}$ et celles de M $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}'$ sont reliées par

$$\vec{O'M} = \cancel{\vec{OM}}\ \vec{OM} - \vec{OO'}$$

$$x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} - (x_{o'}\vec{i} + y_{o'}\vec{j} + z_{o'}\vec{k})$$

I) Coordonnées polaires (dans un plan)

Si E est un plan euclidien et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct, alors on note

$$\begin{cases} \vec{u}_\theta = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j} \\ \vec{v}_\theta = -\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{u}_{\theta+2\pi} = \vec{u}_\theta \qquad \vec{v}_{\theta+2\pi} = \vec{v}_\theta$$

Pour tout point M de E, il existe un couple (r, θ) $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{OM} = r \, \vec{u}_\theta = r\cos\theta \, \vec{i} + r\sin\theta \, \vec{j}$

Le couple (r, θ) est appelé coordonnées polaires de M.

Si $M = O$, $(0, \theta)$ est un couple de coordonnées polaires pour tout θ

Si $M \neq O$, les coordonnées polaires de M ~~se déduisent~~ ~~par ajout d'un~~ sont uniques modulo 2π pour θ

B) Coordonnées cylindriques (~~en~~ dimension 3)

Si E est un espace euclidien de dimension 3 et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct alors on note

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j}$$

$$\vec{v}_\theta = -\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j}$$

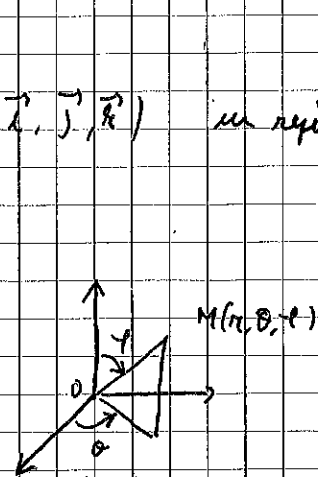
Pour tout point M de E, il existe un triplet (r, θ, z) $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{OM} = r \, \vec{u}_\theta + z \, \vec{k}$$

4) Coordonnées sphériques (en dimension 3)

Si E est un espace euclidien de dim 3 et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct

$$\vec{OM} = r \cos\varphi \, \vec{k} + r \sin\varphi \, \vec{u_\theta}$$
$$= r \cos\varphi \, \vec{k} + r \sin\varphi \cos\theta \, \vec{i} + r \sin\varphi \sin\theta \, \vec{j}$$



Le lien entre coordonnées cartésiennes et coordonnées sphériques est

$$x = r \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = r \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = r \cos\varphi.$$

5) Coordonnées barycentriques

Soit un repère affine d'un espace euclidien de dimension 1/2/3 est la donnée de 2/3/4 points distincts / non alignés / non coplanaires

Si $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ est un repère affine de E de dim 3 pour tout point M de E il existe un quadruplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0,0)$ tel que

$$\lambda_0 \vec{A_0M} + \lambda_1 \vec{A_1M} + \lambda_2 \vec{A_2M} + \lambda_3 \vec{A_3M} = \vec{O}$$

Tous les quadruplets solution sont appelés

$(\lambda_0, \ldots, \lambda_3)$ est appelé système coordonnée barycentrique de M dans le repère affine $\mathcal{R}$.

Les autres coordonnées barycentriques ~~sont toutes~~ se déduisent d'un quadruplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_3)$ par multiplication par un scalaire.

II) Barycentre

<u>Définition</u> : Soit $(A_1 \ldots A_n)$ n points d'un espace euclidien E
$\mu_1 \ldots \mu_n$ n nombres réels de somme non nulle.

Alors il existe un unique point M de E tel que
$$\mu_1 \overrightarrow{MA_1} + \ldots + \mu_n \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$$

Il est appelé barycentre des points massifs (M_i, μ_i)

<u>Propriété</u> : Si G est le barycentre de (A_i, μ_i)
alors pour tout $M \in E$

$$\sum_i \mu_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum \mu_i\right) \overrightarrow{MG}$$

Théorème (Associativité du barycentre)

Soit $(A_1 \ldots A_n)$ n points d'un espace euclidien E
$(\mu_1 \ldots \mu_n)$ n nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \neq 0$ et $\sum_{j=1}^{p} \mu_j \neq 0$

Alors le barycentre de (A_i, μ_i) $1 \leq i \leq n$ est le barycentre
de $(G', \mu_1 + \ldots + \mu_p)$ $(A_{p+1}, \mu_{p+1}) \ldots (A_n, \mu_n)$
où G' est le barycentre de $(A_1, \mu_1) \ldots (A_p, \mu_p)$

<u>Dem</u> : Soit G'' le barycentre de $(G', \mu_1 + \ldots + \mu_p)$ $(A_{p+1}, \mu_{p+1}) \ldots (A_n, \mu_n)$

$$(\mu_1 + \ldots + \mu_p) \overrightarrow{G''G'} + \mu_{p+1} \overrightarrow{G''A_{p+1}} + \ldots + \mu_n \overrightarrow{G''A_n} = \vec{0}$$

$$\mu_1 \overrightarrow{G''A_1} + \ldots + \mu_p \overrightarrow{G''A_p} + \mu_{p+1} \overrightarrow{G''A_{p+1}} + \ldots + \mu_n \overrightarrow{G''A_n} = \vec{0}$$

Par unicité G'' est le barycentre (A_i, μ_i)

Application : Les médianes d'un triangle sont concourantes.

Def : Soit E un espace euclidien de dimension $\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$

Un repère affine de E est
- un couple de points distincts $A_0\ A_1$
- un triplet de points non alignés $A_0\ A_1\ A_2$
- un quadruplet de points non coplanaires

Théorème : Soit (A_0, A_1, A_2) un repère affine d'un plan euclidien.
Alors tout point M de E est barycentre de A_0 A_1 A_2 affectées de masse (μ_0, μ_1, μ_2). $\sum \mu_i \neq 0$
Le triplet de masse est unique à multiplication près par un même scalaire non nulle. Un tel triplet est appelé coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A_0, A_1, A_2)

Dem : Comme (A_0, A_1, A_2) est un triplet de points non alignés, $(A_0, \vec{A_0A_1}, \vec{A_0A_2})$ est un repère cartésien de E.

Soit $M \in E$. Il existe donc $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\vec{A_0M} = x\,\vec{A_0A_1} + y\,\vec{A_0A_2}$$

$$(1-x-y)\,\vec{MA_0} + x\,\vec{MA_1} + y\,\vec{MA_2} = \vec{0}$$

Donc $(1-x-y)$ et x, y sont des masses possibles.

Si M est barycentre de (A_0, μ_0) (A_1, μ_1) (A_2, μ_2)

$$\vec{A_0M} = \frac{\mu_0\,\vec{A_0A_0} + \mu_1\,\vec{A_0A_1} + \mu_2\,\vec{A_0A_2}}{\mu_0+\mu_1+\mu_2}$$

Donc $\dfrac{\mu_1}{\mu_0+\mu_1+\mu_2} = x$ $\qquad \dfrac{\mu_2}{\mu_0+\mu_1+\mu_2} = y$

$\mu_1 = x(\mu_1+\mu_2+\mu_3)$ $\qquad \mu_2 = y(\mu_0+\mu_1+\mu_2)$ $\qquad \mu_0 = (1-x-y)(\mu_0+\mu_1+\mu_2)$

II) Equations

Un système d'équations pour un sous ensemble F d'un espace euclidien E est un système de conditions exprimées en termes de coordonnées qui caractérisent l'appartenance à F.

Exemple : Si E est un plan euclidien orienté et $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Soit $\mathcal{C}_{O,r}$ le cercle de centre O et de rayon r.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{O,r} \iff OM = r$$
$$\iff \vec{OM}^2 = r^2$$
$$\iff \cancel{x^2+y^2=r^2}$$
$$\iff (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})^2 = r^2$$
$$\iff x^2 + y^2 = r^2$$

Soit d la droite passant par $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal au vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \iff \vec{AM} \perp \vec{v}$$
$$\iff \vec{AM} \cdot \vec{v} = 0$$
$$\iff \left[(x-1)\vec{\imath} + (y-2)\vec{\jmath}\right] \cdot (3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) = 0$$
$$\iff 3(x-1) + 4(y-2) = 0$$
$$\iff 3x + 4y = 11$$

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Rappel : deux vecteurs non nuls $\vec{U}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \vec{V} = \lambda \vec{U}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \vec{V}\begin{pmatrix}\lambda X\\ \lambda Y\end{pmatrix}$$

$$\iff XY' - YX' = 0$$

Si l'un des vecteurs est nul, U et V sont colinéaires et $XY' - YX' = 0$

Dans tous les cas

$\vec{U}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff \underbrace{XY' - YX'}_{\det\begin{vmatrix}X & X'\\ Y & Y'\end{vmatrix}} = 0$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \Delta \iff \vec{AM} \parallel \vec{u}$$

$$\iff \begin{vmatrix}x-1 & 3\\ y-2 & 4\end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 4(x-1) - 3(y-2) = 0$$

$$\iff 4x - 3y = -2$$

Vérifications : • les coordonnées de $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ vérifient $4(1) - 3(2) = -2$

• le vecteur $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Equations en coordonnées barycentriques

Lemme Soit E un ~~espace~~ plan affine euclidien, (A_0, A_1, A_2) un repère affine

$$A\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}\mu_0\\ \mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}\nu_0\\ \nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix} \qquad \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2 \neq 0 \qquad \boxed{\lambda_0 \neq 0}$$

Alors A, B, C sont alignés

$$\iff A, B, D \begin{pmatrix}\nu_0 - \frac{\nu_0}{\lambda_0}\lambda_0\\ \nu_1 - \frac{\nu_0}{\lambda_0}\lambda_1\\ \nu_2 - \frac{\nu_0}{\lambda_0}\lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{vmatrix} \lambda_0\mu_1 - \lambda_1\mu_0 & \lambda_0\nu_1 - \lambda_1\nu_0 \\ \lambda_0\mu_2 - \lambda_2\mu_0 & \lambda_0\nu_2 - \lambda_2\nu_0 \end{vmatrix} = 0$$

Dem :

$$(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)\,\overrightarrow{AA} = \lambda_0\overrightarrow{AA_0} + \lambda_1\overrightarrow{AA_1} + \lambda_2\overrightarrow{AA_2}$$

$$(\mu_0+\mu_1+\mu_2)\,\overrightarrow{AB} = \mu_0\overrightarrow{AA_0} + \mu_1\overrightarrow{AA_1} + \mu_2\overrightarrow{AA_2}$$

$$\lambda_0(\mu_0+\mu_1+\mu_2)\,\overrightarrow{AB} = (\lambda_0\mu_1 - \lambda_1\mu_0)\,\overrightarrow{AA_1} + (\lambda_0\mu_2 - \lambda_2\mu_0)\,\overrightarrow{AA_2}$$

$$\lambda_0(\nu_0+\nu_1+\nu_2)\,\overrightarrow{AC} = (\lambda_0\nu_1 - \lambda_1\nu_0)\,\overrightarrow{AA_1} + (\lambda_0\nu_2 - \lambda_2\nu_0)\,\overrightarrow{AA_2}$$

Comme $\lambda_0 \neq 0$ $\overrightarrow{AA_1}$ et $\overrightarrow{AA_2}$ sont indépendants

(sinon un triplet $(0, \alpha, \beta)$ donnerait des coordonnées bary de A)

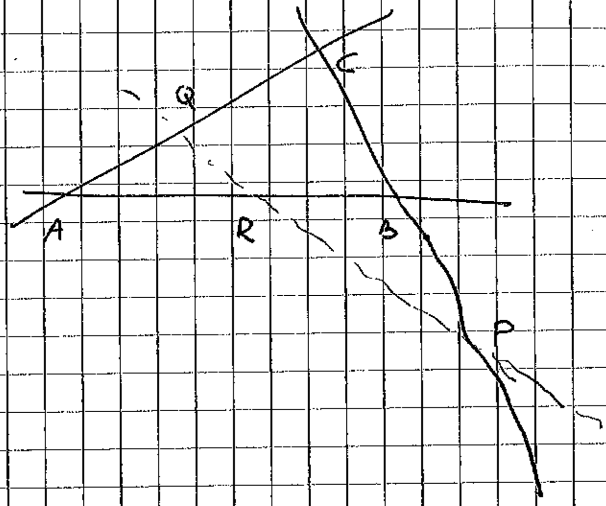
Donc A, B, C sont alignés

$$\iff \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} = 0.$$

Théorème de Menelaus

$P \in (BC)$ $Q \in (AC)$ $R \in (AB)$

$P \neq C$ $Q \neq A$ $R \neq B$



P, Q, R alignés

$\Leftrightarrow \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$

Dém : Les coordonnées barycentriques dans le repère ABC sont

$P(0, p, 1-p)$ $Q(1-q, 0, q)$ $R(r, 1-r, 0)$

p, q, r non nuls

$\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \dfrac{p-1}{p}$ $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \dfrac{q-1}{q}$ $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \dfrac{r-1}{r}$

$r \neq 0$

R, P, Q alignés

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} (r p - (1-r) 0) & r 0 - (1-r)(1-q) \\ r(1-p) - 0 \times 0 & r q - 0 (1-q) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} r p & (1-r)(1-q) \\ r(1-p) & r q \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow pqr = (1-p)(1-r)(1-q)$$