190. *La traverse.*

Soit ABC un triangle. On pourra faire les figures en prenant AB = 11 cm, BC = 14 cm, AC = 10 cm.

1) On se donne un point P′ de [AB] (on prendra, par exemple, BP′ = 4 cm) et un point Q″ de [AC] vérifiant BP′ = CQ″. On se propose de construire des points C′ sur la demi-droite [BC) et A′ sur la demi-droite [BA) tels que (A′C′) soit parallèle à (AC) et un point $Q' \in [A'C']$ qui vérifie BP′ = P′Q′ = Q′C′.

Montrer, en étudiant une figure d'analyse, que si cette construction est réalisée le quadrilatère CQ″Q′C′ est un parallélogramme. Effectuer la construction de Q′ puis de A′, C′.

2) Construire des points $P \in [AB]$ et $Q \in [AC]$ tels que BP = PQ = QC (on pourra utiliser la question 1) et une homothétie).

3) On suppose la construction de la question 2) réalisée dans un triangle ABC de dimensions quelconques. Montrer que l'on a $AC \geqslant PA$. En déduire qu'on a $AB \leqslant 2AC$. Montrer qu'on a aussi $AC \leqslant 2AB$.

191. *La traverse, variante.*

1) On fixe un segment [PQ]. On se donne un angle α (sans lien avec [PQ]).

a) Construire un triangle OPQ, isocèle en O, d'angle à la base $\widehat{OPQ} = \alpha$. Discuter.

b) Construire un triangle OPQ, isocèle en O, d'angle $\widehat{POQ} = \alpha$ (on pourra construire les angles à la base du triangle). Discuter.

2) Soit ABC un triangle. On suppose AC < AB. Soit D le point de [AB] vérifiant BD = AC. Soit O le point d'intersection des médiatrices de [BC] et de [AD].

a) Montrer que l'on a AD < BC. Montrer que les triangles OBD et OCA sont isométriques.

b) On considère $P \in [AB]$ et $Q \in [AC]$ tels que BP = CQ. Montrer que l'on a OP = OQ et $\widehat{POQ} = \widehat{BOC}$.

c) On donne une longueur r. Construire $P \in [AB]$ et $Q \in [AC]$ tels que BP = CQ et PQ = r (on utilisera 1) pour réaliser un triangle isométrique à OPQ). Discuter.

192. *Bissectrice.*

On considère dans le plan euclidien une droite Δ et deux points distincts B et I n'appartenant pas à Δ et situés du même côté de Δ. Soit C le projeté orthogonal de I sur Δ. L'objectif de l'exercice est de construire un point A de Δ tel que (AI) soit la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$.

1) On suppose la construction réalisée. Soit J le projeté orthogonal de I sur (AB). Montrer que l'on a IJ = IC.

2) Réaliser la construction. Discuter. Préciser en particulier, selon la position de B par rapport à I et Δ, dans quels cas il y a une unique solution et dans quels cas il n'y en a aucune.

Chapitre 7
La mesure des aires

Introduction

La notion d'aire (abordée dans ce chapitre) et celle de volume (que nous étudierons au chapitre 10) sont assez voisines et elles comptent parmi les plus anciennes et les plus importantes des mathématiques. Présentes dans l'enseignement dès l'école primaire, ce sont pourtant, parfois, des notions mal aimées.

A. BREF HISTORIQUE

Aires et volumes sont des notions étudiées dès l'Antiquité. Bien sûr, au départ elles le sont en vue des applications. Pour les aires il s'agit d'applications agraires, mesure des terrains, etc. Un exemple célèbre (extrait de l'Énéide) est le problème de la reine Didon et de la peau de bœuf, un bel exemple du lien trouble entre aire et périmètre (voir, par exemple, `http://grenier2clio.free.fr/grec/didon.htm`) !

Les mathématiciens se sont emparés de ces notions depuis très longtemps, notamment à partir des Grecs. Ainsi, la plupart des démonstrations produites par les Grecs du théorème de Pythagore ou de celui de Thalès sont fondées sur des arguments d'aires (voir ci-dessous § 2.A et proposition 2.8 ou consulter [HMC] ou [F]). Autre exemple : nous avons vu au chapitre 6 que deux des grands problèmes laissés ouverts par les Grecs (la duplication du cube et la quadrature du cercle) sont respectivement des problèmes de volume et d'aire.

Le point culminant de l'Antiquité en ce domaine est sans doute atteint par Archimède avec la mesure de l'aire du disque, et surtout celle du segment de parabole dont nous reparlerons plus loin (voir [Arc]). Ce résultat, rapporté à son contexte, est l'un des plus remarquables de toutes les mathématiques. Archimède donne de ce résultat deux preuves très intéressantes, l'une, mécanique, utilise des arguments de bras de levier, l'autre est plus géométrique et utilise la méthode d'exhaustion. Le lecteur aura une idée de cette preuve en résolvant le problème numéro 2.

Bien entendu, les Anciens ne se posaient pas la question de l'existence des aires, considérée comme allant de soi.

Une autre phase historique essentielle est le XVIIe siècle avec l'invention du calcul différentiel et intégral par Newton et Leibniz et notamment le lien entre aire et primitive. Le difficile résultat d'Archimède évoqué ci-dessus est ramené par les nouvelles méthodes au niveau d'un élève de lycée actuel.

Enfin la dernière période importante se situe entre 1850 et 1910. Les mathématiciens se penchent alors sur les fondements de la théorie (axiomes des aires, existence, unicité, etc.) avec d'abord les travaux de Riemann et Darboux, puis ceux de Lebesgue, Borel, Montel et bien d'autres. Le progrès le plus extraordinaire de l'époque est l'intégrale de Lebesgue, dont la souplesse et la commodité d'emploi se sont très vite imposées aux mathématiciens.

On verra plus loin que des problèmes concernant la mesure des aires et des volumes, d'énoncé simple, mais de solution non triviale, ont subsisté jusque dans les années 1920, voire jusqu'en 2000 (ce qui prouve, s'il en était besoin, que les mathématiques sont bien vivantes). Actuellement, la notion de mesure est une notion centrale en mathématiques, notamment en analyse et en probabilités.

B. DANS L'ENSEIGNEMENT

Les notions d'aire et de volume apparaissent dès l'école élémentaire. Dans les débuts de la Troisième République (et jusque dans les années 1950), l'enseignement de ces questions est centré sur les problèmes pratiques : mesures agraires bien sûr, mais aussi calcul de volumes d'objets usuels : un tonneau, un tas de cailloux, une bille de bois, etc.

De nos jours, avec la diminution du nombre de personnes impliquées dans l'agriculture, les manuels choisissent plutôt d'autres exemples : carrelages, papiers peints, terrains de sports, etc.).

Notons que la notion d'aire est introduite à l'école primaire par des manipulations de découpage et recollement, ce qui est, comme on le verra, une excellente méthode.

Le programme actuel de l'enseignement secondaire réduit trop souvent l'étude des notions d'aires et de volumes à l'apprentissage de quelques formules, pas toujours justifiées, et ces concepts ne sont sans doute pas suffisamment réorganisés au moment de l'introduction de l'intégrale.

Enfin, dans l'enseignement supérieur, bien que beaucoup des outils nécessaires à la compréhension de ces notions soient présents, on ne revient pratiquement jamais dessus. L'un des objectifs de ce texte est de combler cette lacune pour les futurs professeurs des écoles.

Dans le premier paragraphe nous donnons une définition axiomatique des aires et nous montrons comment utiliser cette définition grâce à la méthode de découpage et recollement. Le deuxième paragraphe est destiné à justifier les calculs usuels des aires des polygones, avec une petite incursion en analyse pour le calcul de l'aire située sous le graphe d'une fonction continue. Le troisième paragraphe contient la justification théorique de la méthode de découpage et recollement dans le cas des polygones, avec le théorème de Bolyai. Le paragraphe 4 concerne la longueur du cercle et l'aire du disque. Viennent ensuite trois paragraphes annexes qui contiennent des compléments plus théoriques. L'annexe A concerne la question de l'homogénéité [1]. L'annexe B nous permet de construire effectivement la mesure des aires. Il s'agit essentiellement de la méthode d'exhaustion (ou de passage à la limite) inaugurée par les Grecs (et que nous utilisons en fait pour le calcul de l'aire du disque). Enfin l'annexe C contient un certain nombre de résultats plus récents qui sont donnés à titre culturel. Le lecteur pourra aussi consulter mon article sur le site *Images des mathématiques* : `http://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et.html`

1. Axiomatique de la mesure des aires planes : découpages

A. AXIOMATIQUE

Soit S une partie du plan euclidien. Nous supposerons, le plus souvent, que S est bornée, ce qui signifie que S est contenue dans un carré (ou dans un disque, cela revient au même). Il s'agit de donner un sens à l'aire de S c'est-à-dire, intuitivement, la place occupée par S dans le plan. Pour mesurer cette aire il faut d'abord disposer d'une partie C (en général on prend un carré, mais ce n'est pas du tout obligatoire), dont l'aire est prise comme unité. L'aire d'une partie S est alors mesurée par un nombre $\mu(\mathrm{S}) \geqslant 0$ (intuitivement, le nombre d'unités contenues dans S, pas nécessairement entier, bien entendu). Le nombre $\mu(\mathrm{S})$ (μ comme mesure) est la mesure de l'aire de S, avec l'unité choisie ci-dessus : $\mu(\mathrm{C}) = 1$.

La notion de mesure d'aire, pour être conforme à ce que suggère l'expérience doit vérifier les trois propriétés suivantes que nous allons ériger en axiomes [2].

Définition 1.1. *On considère un plan euclidien* E *et on choisit un repère orthonormé* $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ *de* E. *Une* **mesure des aires planes** *est une application* μ *définie sur un ensemble* $\mathscr{Q}$ *de parties de* E *et à valeurs dans* $\mathbf{R}^+$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

0) *si* C *est le carré unité construit sur le repère* $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, C *est dans* $\mathscr{Q}$ *et on a* $\mu(\mathrm{C}) = 1$,

1) μ *est* **simplement additive** *: si on a des parties* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{Q}$ **disjointes** *(c'est-à-dire vérifiant* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$*) on a* $\mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B})$.

2) μ *est* **invariante par isométrie** *(donc par rotation, translation,*

1. C'est une des nouveautés de cette édition.

2. Pour l'instant on ne se préoccupe pas de savoir comment μ est définie, ni pour quelles parties elle est définie.

symétrie) : si A *est dans* $\mathscr{Q}$ *et si* g *est une isométrie,* $g(\mathrm{A})$ *est dans* $\mathscr{Q}$ *et on a* $\mu(g(\mathrm{A})) = \mu(\mathrm{A})$,

3) μ *est* **homogène** *: si* A *est dans* $\mathscr{Q}$ *et si* h *est une homothétie de rapport* λ, $h(\mathrm{A})$ *est dans* $\mathscr{Q}$ *et on a* $\mu(h(\mathrm{A})) = \lambda^2\mu(\mathrm{A})$.

Remarques 1.2. 1) Les parties du plan qui sont dans $\mathscr{Q}$ sont les parties *quarrables*, c'est-à-dire celles dont on sait calculer les aires. Il ne faut pas espérer pouvoir attribuer une aire finie à toutes les parties du plan, par exemple, l'aire du plan tout entier doit bien être infinie. Bien entendu pour que la notion ait un quelconque intérêt il faut que $\mathscr{Q}$ contienne tous les polygones, convexes ou non, mais aussi les parties bornées usuelles : disque, etc. Dans les quatre premiers paragraphes nous admettrons que les parties auxquelles nous nous intéressons ont bien une aire. Cela sera justifié dans l'annexe B où nous donnerons une définition précise de l'aire et où nous établirons que les parties bornées usuelles du plan ont une aire. Avec cette définition, il y a bien des parties bornées non quarrables, voir § 6.C, mais elles sont suffisamment pathologiques pour que nous puissions les négliger dans un premier temps. D'ailleurs, le difficile théorème de Banach, voir 7.1, montre qu'on peut même trouver une mesure pour laquelle toutes les parties bornées sont quarrables.

2) On notera la conséquence de l'axiome 1) : si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{Q}$ et $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ on a $\mu(\mathrm{A}) \leqslant \mu(\mathrm{B})$: « le tout est plus grand que la partie » comme disaient les Anciens. En effet, on a alors $\mu(\mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{A} - \mathrm{B})$ (au moins si la partie $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ est aussi dans $\mathscr{Q}$).

3) La conjonction des axiomes 1) et 2) implique que l'aire est invariante par **découpage et recollement** (sans perte ni chevauchement) c'est-à-dire par puzzle. C'est d'ailleurs ainsi qu'on introduit l'aire à l'école élémentaire, en faisant manipuler aux enfants de tels découpages et c'est aussi le thème sur lequel nous allons mettre l'accent ici.

4) La formule de l'axiome 1) n'est plus valable si les parties A et B ne sont pas disjointes. Toutefois dans ce cas on a les formules suivantes (si les parties concernées ont toutes une aire) :

$$\mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A} - (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})) + \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mu(\mathrm{B} - (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}))$$

$$\text{et} \qquad \mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

5) En fait, l'axiome 1) vaut aussi (heureusement) si A et B sont « presque disjointes », c'est-à-dire si elles ont en commun un segment, voire une courbe. La raison de cette propriété c'est le fait qu'un segment est d'aire nulle. Nous revenons sur cette propriété (que nous appellerons l'axiome 1′) au paragraphe suivant.

6) L'axiome 3) n'est pas nécessaire, mais nous avons choisi de l'imposer dès maintenant pour plusieurs raisons. D'abord, il simplifie les premiers calculs d'aires (notamment celles du carré et du rectangle), ensuite, il permet de comprendre la construction de la mesure que nous proposerons à l'annexe B, enfin et surtout, c'est l'un de nos objectifs didactiques essentiels : comprendre le lien entre la mesure des aires (et des volumes) et la notion de dimension. Cet axiome peut sembler très naturel : on le comprend en découpant un carré de côté n en n^2 carrés de côté 1. Cependant, de nombreux travaux (voir par exemple [Rog]) ont montré que c'était un véritable obstacle pour les élèves. C'est pourquoi nous indiquerons à l'annexe A comment on peut montrer les propriétés des aires sans l'utiliser.

7) L'aire est la grandeur (voir chapitre 4, annexe) associée à la mesure μ. L'aire de S sera notée $\mathscr{A}(\mathrm{S})$. Si on note c l'aire du carré unité C (par exemple, si C est le carré de côté 1 m, c est un « mètre carré »), la relation entre aire et mesure est donnée par : $\mathscr{A}(\mathrm{S}) = \mu(\mathrm{S})c$. Si l'on change d'unité (par exemple si on prend un carré de côté 1 dm), la mesure change, mais l'aire ne change pas : on a $\mathscr{A}(\mathrm{C}) = c = 1\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{dm}^2$. Il est clair que les propriétés de la définition 1.1 sont aussi valables pour les aires.

La définition axiomatique ci-dessus, même si elle est naturelle, pose nombre de questions : une telle mesure des aires existe-t-elle ? sur quel ensemble de parties $\mathscr{Q}$? est-elle unique[3] ? Nous aborderons toutes ces questions dans l'annexe B, mais nous allons montrer dès maintenant que, bien que la notion d'aire ne soit pas encore définie précisément, on peut déjà la manipuler grâce aux découpages et calculer beaucoup d'aires, sinon toutes, en utilisant simplement les axiomes ci-dessus. Comme nous l'avons dit, nous admettrons toujours, dans les paragraphes de 1 à 4, que les parties du plan considérées ont une aire.

B. AIRE D'UN POINT ET D'UN SEGMENT

Le résultat suivant montre que certaines aires sont nulles, ce qui permet d'utiliser l'axiome 1′ (voir 1.4 ci-dessous), beaucoup plus commode que l'axiome 1. Le ressort de la démonstration est l'axiome 3 qui prend en compte le fait que le plan est de dimension 2. Pour une autre preuve, voir annexe A.

Proposition 1.3. *L'aire d'un point et l'aire d'un segment sont nulles.*

Démonstration. Soit A un point, posons $m = \mu(\{\mathrm{A}\})$ et considérons l'homothétie h de centre A et de rapport 2. On a $h(\{\mathrm{A}\}) = \{\mathrm{A}\}$ et donc, en vertu de l'axiome 3, $\mu(\{\mathrm{A}\}) = 4m = m$, d'où $m = 0$.

Soit maintenant [AB] un segment. Comme [AB] est réunion de [AB[et du point B et que ce dernier est d'aire nulle, on a $\mu([\mathrm{AB}]) = \mu([\mathrm{AB}[) := m$.

3. Nous verrons que c'est bien le cas, au moins sur les parties quarrables, de sorte qu'on peut parler de la mesure des aires, une fois l'unité choisie.

Considérons alors le point C tel que B soit milieu de [AC]. On a $\mu([\mathrm{AC}[) = \mu([\mathrm{AB}[) + \mu([\mathrm{BC}[)$ par l'axiome 1. Mais, comme [BC[est déduit de [AB[par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, ces deux parties sont toutes deux d'aire m et on a donc $\mu([\mathrm{AC}[) = 2m$. Mais, le segment [AC[se déduit aussi de [AB[par l'homothétie de centre A et de rapport 2, de sorte qu'on a, en vertu de l'axiome 3, $\mu([\mathrm{AC}[) = 4\mu([\mathrm{AB}[) = 4m$. En définitive, on a $2m = 4m$ d'où $2m = 0$ et $m = 0$ comme annoncé.

On a alors le résultat annoncé en 1.2.5 :

Corollaire 1.4 (Axiome 1′). *Si on a deux parties* A *et* B *« presque disjointes » (c'est-à-dire telles que l'intersection de* A *et* B *est formée d'une réunion finie de segments de droites et de points), on a* $\mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B})$.

Démonstration. Comme $\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ est nul cela résulte de la formule

$$\mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

(voir 1.2.4).

C. LES DÉCOUPAGES FONDAMENTAUX

Les trois lemmes qui suivent jouent un rôle crucial dans la géométrie affine du plan. Nous les prouvons ici, avant tout calcul d'aire, pour bien montrer la puissance de la méthode de découpage et recollement, voir aussi [P].

Lemme 1.5 (Lemme du demi-parallélogramme). *Soit* $\mathrm{P} = \mathrm{ABCD}$ *un parallélogramme. La diagonale* [AC] *partage* P *en deux triangles de même aire :* $\mathscr{A}(\mathrm{ABC}) = \mathscr{A}(\mathrm{ACD}) = \frac{1}{2}\mathscr{A}(\mathrm{P})$. *De même pour la diagonale* [BD].

Démonstration. Soit O l'intersection des diagonales de P (fig. 43). La symétrie de centre O échange les triangles ABC et ACD qui ont donc même aire en vertu de l'axiome 2. L'aire de P est la somme des aires des deux triangles en vertu de l'axiome 1′.

Corollaire 1.6. *Soit* $\mathrm{P} = \mathrm{ABCD}$ *un parallélogramme et soit* M *un point de* [CD]. *On a* $\mathscr{A}(\mathrm{AMB}) = \frac{1}{2}\mathscr{A}(\mathrm{P})$.

Démonstration. On trace la parallèle à (BC) passant par M (fig. 44). Elle recoupe [AB] en N. On a donc $\mathscr{A}(\mathrm{AMB}) = \mathscr{A}(\mathrm{AMN}) + \mathscr{A}(\mathrm{MNB})$ par l'axiome 1′. Il suffit alors de découper P en les deux parallélogrammes ANMD et à NMCB et de leur appliquer le lemme du demi-parallélogramme pour conclure.

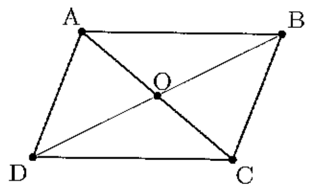

FIG. 43.

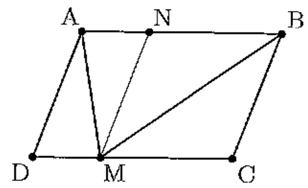

FIG. 44.

Lemme 1.7 (Lemme de la médiane). *Soit* ABC *un triangle et soit* A′ *le milieu de* [BC]. *On a* $\mathscr{A}(\mathrm{ABA'}) = \mathscr{A}(\mathrm{AA'C})$ *(la médiane* AA′ *partage le triangle en deux triangles de même aire).*

Démonstration. On mène les parallèles à (BC) et (AA′) passant respectivement par A et C. Elles se coupent en D. Les parallélogrammes ABA′D et AA′CD ont même aire (le double de $\mathscr{A}(\mathrm{AA'D})$), donc les triangles ABA′ et AA′C aussi par 1.5.

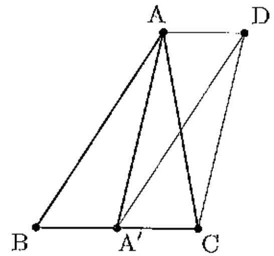

FIG. 45.

Une autre démonstration consiste à utiliser les milieux B′ et C′ de [AC] et [AB] et les découpages $\mathrm{ABA'} = \mathrm{AC'A'} \cup \mathrm{BC'A'}$ et $\mathrm{ACA'} = \mathrm{AB'A'} \cup \mathrm{CB'A'}$.

Lemme 1.8 (Lemme du trapèze). *Soient* ABC *et* DBC *deux triangles de même base* [BC] *dont les sommets* A *et* D *sont sur une parallèle à* (BC) *(de sorte que l'un des polygones* ABCD *ou* ADBC *est convexe, donc un trapèze). Alors les deux triangles ont même aire.*

Démonstration. On peut supposer par exemple que ABCD est convexe. Menons par C et D les parallèles à (AB) qui recoupent respectivement (AD) et (BC) en C′ et D′. Il y a deux cas de figures (fig. 46 et 47).

1) Si D est dans le segment [AC′] les aires des triangles ABC et DBC sont toutes deux égales à la moitié de l'aire du parallélogramme ABCC′ en vertu de 1.5 et 1.6, donc sont égales.

2) Sinon, c'est C qui est dans [BD′]. On a alors $\mathscr{A}(\mathrm{ABCD}) = \mathscr{A}(\mathrm{ABC}) + \mathscr{A}(\mathrm{ACD}) = \mathscr{A}(\mathrm{DBC}) + \mathscr{A}(\mathrm{ABD})$ par l'axiome 1′ et $\mathscr{A}(\mathrm{ACD}) = \mathscr{A}(\mathrm{ABD})$ comme moitiés du parallélogramme ABD′D par 1.6 et 1.5, d'où la conclusion.

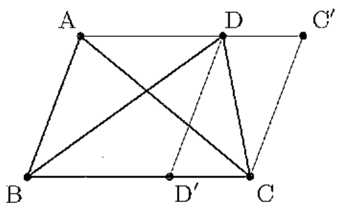

FIG. 46.

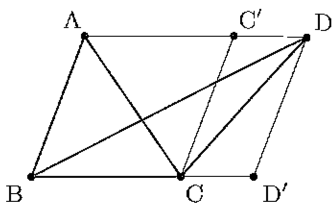

FIG. 47.

2. Calculs d'aires à partir des axiomes

Dans ce paragraphe nous montrons comment retrouver une bonne partie des formules usuelles concernant les aires au moyen des seuls axiomes 1.1. Nous commençons par calculer la mesure de l'aire d'un carré quelconque du plan.

A. L'AIRE DU CARRÉ

Proposition 2.1. *Soit* K *un carré dont la mesure du côté est un nombre* $a > 0$. *On a* $\mu(\mathrm{K}) = a^2$.

Démonstration. Considérons d'abord le cas du carré $\mathrm{K}_0 = (\mathrm{OPQR})$ bâti sur les axes de coordonnées et de côté a. Ce carré est déduit du carré unité C par l'homothétie de centre O et de rapport a et il est bien de côté a. En vertu des axiomes 0 et 3 des aires, on a $\mu(\mathrm{K}_0) = a^2$, de sorte qu'il vérifie la proposition. Soit maintenant $\mathrm{K} = (\mathrm{O'P'Q'R'})$ un carré quelconque de côté a. On peut montrer directement qu'il existe une isométrie u telle que $u(\mathrm{K}_0) = \mathrm{K}$, ce qui, en vertu de l'axiome 2, donne le résultat, mais on peut aussi procéder par découpage. On partage chacun des deux carrés en deux triangles rectangles isocèles, OPQ et OQR d'une part, O′P′Q′ et O′Q′R′ d'autre part. En vertu du premier cas d'isométrie des triangles, ces quatre triangles sont isométriques, donc ont même aire et donc aussi les carrés qui sont chacun réunion (presque) disjointe de deux des triangles.

B. L'AIRE DU RECTANGLE

Le résultat suivant n'étonnera pas non plus [4] :

Proposition 2.2. *Soit* R *un rectangle dont la longueur mesure* a *et la largeur* b $(a, b \in \mathbf{R}^+)$. *On a* $\mu(\mathrm{R}) = ab$.

4. Merci aux collègues lillois de m'avoir signalé qu'on avait le résultat sans passage à la limite, grâce à l'homogénéité.

Démonstration. La proposition 2.1, le découpage ci-dessous et la formule $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ donnent le résultat.

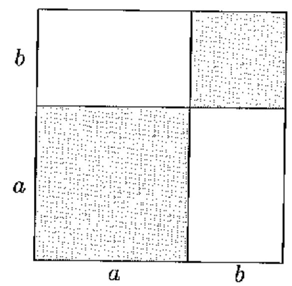

FIG. 48.

Remarque 2.3. Le résultat précédent va nous permettre d'oublier les mesures et de ne plus parler que de grandeurs. En effet, il est maintenant naturel de définir le produit ab de deux longueurs comme l'aire d'un rectangle (quelconque) dont les côtés ont pour longueurs a et b. On peut donc écrire $\mathscr{A}(\mathrm{R}) = ab$ où a et b sont des longueurs et non plus des nombres.

Application : le théorème de Pythagore.

Si ABC est un triangle rectangle en A et si a, b, c sont les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB le théorème de Pythagore affirme qu'on a $a^2 = b^2 + c^2$. Les deux figures ci-dessous sont des prolongements de la figure précédente et elles donnent l'une des nombreuses preuves de ce théorème utilisant les aires. Elles se passent de commentaires.

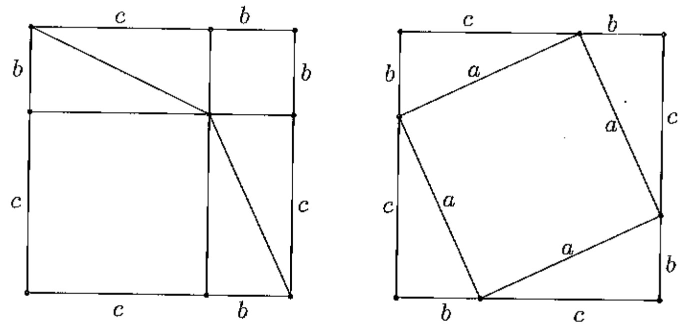

FIG. 49.

C. L'AIRE DU TRIANGLE

Proposition 2.4. *Soit* T = ABC *un triangle et* AH *la hauteur issue de* A. *On a* $\mathscr{A}(\mathrm{T}) = \frac{1}{2}\mathrm{BC} \times \mathrm{AH}$ *(base multipliée par hauteur et divisée par* 2*).*

Démonstration. On distingue deux cas (fig. 50).

a) Supposons $\mathrm{H} \in [\mathrm{BC}]$. On mène les perpendiculaires à (BC) en B et C. Ces droites coupent la parallèle à (BC) passant par A en B′ et C′ respectivement. Le quadrilatère BCC′B′ est un parallélogramme qui a un angle droit, c'est donc un rectangle. L'aire de ABC est la moitié de celle du rectangle en vertu de 1.6, or celle-ci vaut $\mathrm{BC} \times \mathrm{BB}' = \mathrm{BC} \times \mathrm{AH}$, d'où le résultat.

b) Supposons $\mathrm{H} \notin [\mathrm{BC}]$. Menons par A la parallèle à (BC) et choisissons un point A′ de cette parallèle qui se projette orthogonalement en $\mathrm{H}' \in [\mathrm{BC}]$ (on peut, par exemple, prendre A′ sur la médiatrice de [BC] ou sur la perpendiculaire à (BC) en B, etc.). En vertu du premier cas, l'aire de A′BC vaut $(1/2)\,\mathrm{A'H'} \times \mathrm{BC} = (1/2)\,\mathrm{AH} \times \mathrm{BC}$ et c'est aussi l'aire de ABC en vertu du lemme du trapèze.

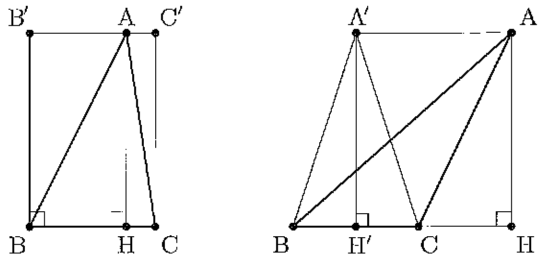

FIG. 50.

Remarques 2.5. 1) Bien entendu on peut appliquer la même formule avec un autre côté pris pour base et la hauteur correspondante.

2) Le lecteur retrouvera sans peine les lemmes de découpage du paragraphe précédent à l'aide de la formule *base* × *hauteur*/2.

Corollaire 2.6 (Lemme des proportions). *Soient* ABC *et* AB′C′ *deux triangles ayant en commun le sommet* A *et dont les côtés* [BC] *et* [B′C′] *sont portés par la même droite. Le rapport des aires* $\mathscr{A}(\mathrm{ABC})$ *et* $\mathscr{A}(\mathrm{AB'C'})$ *est égal au rapport des longueurs* BC *et* B′C′.

Démonstration. En effet, la hauteur AH est la même pour les deux triangles.

Corollaire 2.7. *Soit* T = ABC *un triangle et soit* $\widehat{\mathrm{A}}$ *l'angle (non orienté) en* A. *On a* $\mathscr{A}(\mathrm{T}) = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \sin \widehat{\mathrm{A}}$.

Démonstration. En effet, si BH est la hauteur issue de B on a $\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} = \sin \widehat{\mathrm{A}}$ par définition du sinus. La formule résulte alors de 2.4 et de la remarque 2.5, 1.

Le lemme suivant est souvent précieux :

Corollaire 2.8 (Lemme du chevron). *Soit* ABC *un triangle et* M *un point du plan, distinct de* A. *On suppose que la droite* (AM) *coupe* (BC) *en* A′. *Alors on a :*

$$\frac{\mathscr{A}(\mathrm{AMB})}{\mathscr{A}(\mathrm{AMC})} = \frac{\mathrm{A'B}}{\mathrm{A'C}}.$$

Démonstration. Il y a plusieurs cas de figure. Traitons le cas où M est à l'intérieur du triangle (c'est celui qui justifie l'appellation de ce lemme voir figure 51). Posons $r = \frac{\mathrm{A'B}}{\mathrm{A'C}}$. On a, par le lemme des proportions appliqué aux triangles de bases portées par (BC) et de sommets A et M, $\mathscr{A}(\mathrm{AA'B}) = r \times \mathscr{A}(\mathrm{AA'C})$ et $\mathscr{A}(\mathrm{MA'B}) = r \times \mathscr{A}(\mathrm{MA'C})$. Il en résulte qu'on a $\mathscr{A}(\mathrm{AMB}) = \mathscr{A}(\mathrm{AA'B}) - \mathscr{A}(\mathrm{MA'B}) = r \times (\mathscr{A}(\mathrm{AA'C}) - \mathscr{A}(\mathrm{MA'C})) = r \times \mathscr{A}(\mathrm{AMC})$.

Les autres cas de figure se démontrent de manière analogue en utilisant éventuellement une somme d'aires au lieu d'une différence. Le lecteur inventera des noms suggestifs pour ces différentes situations. (Par exemple, la figure de droite est un chevron replié !)

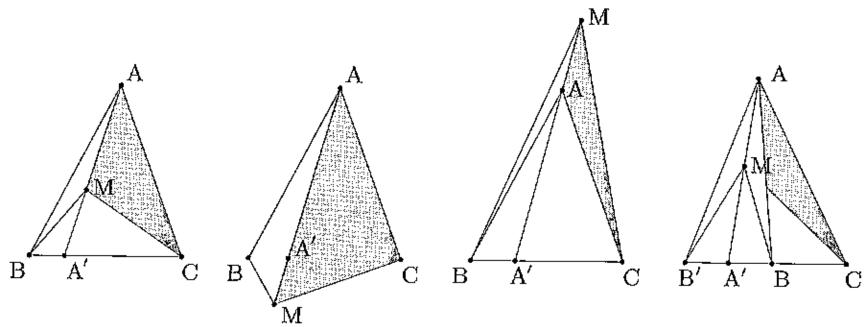

FIG. 51.

D. UNE APPLICATION : LE THÉORÈME DE THALÈS

Les lemmes de découpage 1.5, 1.7, 1.8, le lemme des proportions 2.6, le lemme du chevron 2.8 permettent de prouver nombre de résultats de géométrie affine du plan (Ménélaüs, Gergonne, etc., voir les exercices). Voici comment Euclide utilise ces résultats pour établir Thalès :

Théorème 2.9 (Thalès). *Soit* ABC *un triangle. Soient* $B' \in [AB]$ *et* $C' \in [AC]$. *On suppose* $(B'C')$ *parallèle à* (BC). *On a les égalités :* $\dfrac{BB'}{BA} = \dfrac{CC'}{CA}$ *et* $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.

Démonstration. En effet, on a $\mathscr{A}(BCC') = \mathscr{A}(BCB')$ par le lemme du trapèze et donc $\dfrac{CC'}{CA} = \dfrac{\mathscr{A}(BCC')}{\mathscr{A}(ABC)} = \dfrac{\mathscr{A}(BCB')}{\mathscr{A}(ABC)} = \dfrac{BB'}{BA}$ par le lemme des proportions. Cela donne la première formule et la première égalité de la seconde, en tenant compte des relations $\dfrac{AB'}{AB} + \dfrac{B'B}{AB} = 1$ et $\dfrac{AC'}{AC} + \dfrac{C'C}{AC} = 1$.

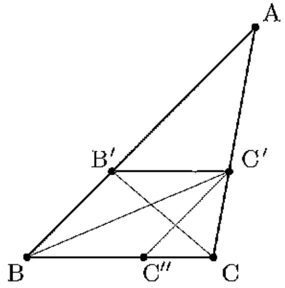

FIG. 52.

La dernière relation est un peu plus difficile. On trace la parallèle à (AB) passant par C'. Elle coupe (BC) en C'', de sorte que $BC''C'B'$ est un parallélogramme. On a donc $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{BC''}{BC} = \dfrac{\mathscr{A}(ABC'')}{\mathscr{A}(ABC)}$ par le lemme des proportions. Mais, par le lemme du trapèze, on a $\mathscr{A}(ABC'') = \mathscr{A}(ABC')$ et on conclut en remarquant qu'on a $\dfrac{\mathscr{A}(ABC')}{\mathscr{A}(ABC)} = \dfrac{AC'}{AC}$, toujours par le lemme des proportions. Une autre méthode consiste à appliquer Thalès avec la parallèle $(C'C'')$: on a $\dfrac{BC''}{BC} = \dfrac{AC'}{AC}$.

E. L'AIRE DES POLYGONES

La formule de l'aire du triangle, jointe à l'additivité, permet de calculer, par découpage et recollement, toutes les aires de polygones. Par exemple, le lecteur montrera, à titre d'exercice, que l'aire d'un losange est le demi-produit des longueurs de ses diagonales. Voici deux autres exemples, celui du parallélogramme et celui du trapèze. Le lecteur pourra produire d'autres démonstrations des formules en utilisant d'autres découpages.

Proposition 2.10. *Soit* $P = ABCD$ *un parallélogramme,* $\widehat{A}$ *son angle en* A, *et soit* H *le projeté orthogonal de* D *sur la droite* (AB). *On a* $\mathscr{A}(P) = AB \times AD \sin\widehat{A} = AB \times DH$.

Démonstration. Comme l'aire de P est le double de celle de ABD en vertu de 1.5 on obtient les formules en appliquant 2.7 et 2.4.

Proposition 2.11. *Soit* $T = ABCD$ *un trapèze de bases* AB *et* CD *et soit* H *le projeté orthogonal de* A *sur* (DC). *On a* $\mathscr{A}(T) = \frac{1}{2}AH \times (AB + CD) = AH \times \dfrac{AB+CD}{2}$.

Démonstration. On obtient la formule en écrivant que le trapèze est réunion des triangles ABC et ACD.

F. UNE APPLICATION EN PHYSIQUE : LA LOI DES AIRES

Nous allons utiliser les lemmes de découpage précédents pour établir l'une des fameuses lois de Kepler sur le mouvement des planètes : la loi des aires, avec une méthode très proche de celle de la preuve originelle de Newton [5]. Nous nous plaçons dans le cas très simple d'une seule planète (disons Mars, pour coller à la fois à Kepler et à l'actualité) tournant autour du soleil, négligeant ainsi les interactions avec les autres corps célestes. On peut alors considérer les deux astres comme des masses ponctuelles.

Cette preuve se situe dans le cadre d'un modèle physique discret (mais on peut retrouver le modèle continu par un passage à la limite). Nous considérons donc ici le temps comme formé de la juxtaposition d'instants très brefs, voire infinitésimaux, de durée h. Les temps de l'échelle sont donc les nh, pour n entier. On considère un point matériel mobile et on note M_n sa position au temps nh. Entre les temps $(n-1)h$ et nh le mobile se déplace de M_{n-1} à M_n avec la vitesse $v_n = M_{n-1}M_n/h$ ou, en vecteurs, la vitesse $\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{M_{n-1}M_n}/h$. Si h est supposé suffisamment petit, on peut considérer que ces vitesses sont constantes entre $(n-1)h$ et nh. Attention, la vitesse pourra varier, en revanche, à chaque instant nh, avec une accélération $\overrightarrow{\gamma_n}$ qui vérifie $\overrightarrow{v_{n+1}} - \overrightarrow{v_n} = h\,\overrightarrow{\gamma_n}$.

Ces points étant précisés, les principes physiques sur lesquels nous nous appuyons sont les suivants :

Loi fondamentale de la mécanique. *L'accélération d'un mobile est proportionnelle à la force à laquelle il est soumis.*

C'est la fameuse loi $\overrightarrow{F} = m\vec{\gamma}$. Dans notre cas, si $\overrightarrow{F_n}$ est la force appliquée en M_n, on a donc $\overrightarrow{v_{n+1}} - \overrightarrow{v_n} = h\,\overrightarrow{F_n}/m$.

Une conséquence de cette loi est le :

Principe d'inertie. *Un mobile qui n'est soumis à aucune force est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.*

On a alors un vecteur vitesse $\vec{v}$ constant, tel que $\overrightarrow{M_nM_{n+1}} = h\vec{v}$ pour tout n.

5. Ce paragraphe a été inspiré par une conférence de Jacques Treiner, voir [CMT] ou [Fe] p. 48.