Chapitre 4
Rappels de géométrie plane

Introduction

Avant d'aborder la deuxième partie du livre, qui porte sur la géométrie, et précisément sur les polygones, les constructions à la règle et au compas, les aires, les polyèdres réguliers et les volumes, nous avons cru bon de fournir au lecteur un aide-mémoire (nécessairement succinct) afin de lui rappeler (la plupart du temps sans démonstration) les résultats de géométrie élémentaire qu'il a appris au collège et au lycée et qui sont nécessaires pour aborder la partie géométrique de ce livre.

Ce texte n'a pas de prétention de cohérence axiomatique et l'ordre des items ne suit pas toujours une logique rigoureuse. Le lecteur doit revoir par lui-même les thèmes abordés ici, en lisant ce chapitre activement, en faisant des dessins, en essayant de comprendre toutes les assertions (voire en essayant de les prouver, mais ce n'est pas toujours facile), en répondant aux questions posées à titre d'exercices, en s'en posant d'autres et en tentant d'y répondre.

Le lecteur peut aussi, pour plus de précisions, se reporter à ses livres du secondaire [1].

Dans ce chapitre, nous allons travailler en géométrie euclidienne plane (la géométrie dans l'espace sera traitée au chapitre 8) et nous commençons en présentant les approches qui se sont succédées dans l'histoire.

A. L'APPROCHE AXIOMATIQUE D'EUCLIDE À HILBERT

On doit au mathématicien grec Euclide (vers 320-vers 280 av. J.-C.) [2] les fameux *Éléments de géométrie* [E], qui faisaient la somme des connaissances de son temps dans le domaine, intégrant les apports plus anciens, notamment ceux de Thalès (né vers 640 av. J.-C.), de Pythagore (environ 580-504) et de l'école de Platon (427-347). Dans ce texte splendide, Euclide

1. Le livre de Terminale S (spécialité maths) de la collection Terracher, Hachette, 1998, est une bonne référence sur les transformations, mais d'autres livres plus anciens peuvent aussi convenir.

2. Nous n'entrerons pas dans les controverses, qui agitent toujours les historiens, au sujet des dates d'Euclide, voire de son existence comme personne unique.

fonde la géométrie à partir d'un petit nombre de postulats (on dirait plutôt aujourd'hui *axiomes*) dont il déduit toutes les autres propositions. Cet édifice remarquable présentait néanmoins quelques imperfections (certains faits étaient considérés comme intuitivement évidents et n'avaient ni le statut d'axiome ni celui de théorème [3]). Une refonte parfaitement rigoureuse de la géométrie euclidienne a été proposée par David Hilbert (1862-1943) en 1899. Le lecteur curieux et courageux pourra consulter le livre [Hi], très clair mais pas toujours facile. D'autres références possibles sont [Ars], [Har], [Li]. Une tentative intermédiaire très intéressante est produite dans [CF], avec un système d'axiomes assez proche de l'enseignement actuel du collège. Nous donnons un aperçu sommaire de quelques-uns des axiomes de Hilbert dans le paragraphe 1. Encore une fois, notre objectif n'est pas de donner une présentation totalement rigoureuse de la géométrie, mais de convaincre le lecteur qu'il est possible de le faire.

Dans le système proposé par Hilbert, on suppose qu'on a un ensemble (appelé *plan*) dont les éléments sont appelés *points* et qui contient des parties appelées *droites*. On ne définit pas ces objets [4], mais on précise les relations qui les lient (c'est le principe de la méthode axiomatique qui veut que les relations entre les objets soient plus importantes que les objets eux-mêmes).

Bien entendu, pour que la géométrie présente un intérêt pratique, elle doit refléter la réalité. Ainsi que l'on disait dans les anciens manuels, l'image du plan est fournie par la surface d'une eau tranquille, celle d'une droite par le fil à plomb et celle d'un point par l'extrémité d'une aiguille. De même, les axiomes doivent correspondre à des vérités intuitivement évidentes. Le lecteur constatera au paragraphe 1 que c'est bien le cas pour les axiomes d'Euclide-Hilbert, au moins pour les premiers d'entre eux.

Les axiomes de Hilbert se divisent en plusieurs groupes : les axiomes d'incidence (qui décrivent les relations entre points et droites), avec le fameux postulat des parallèles, les axiomes d'ordre, qui donnent un sens à la relation « entre » (un point d'une droite est situé entre deux autres), les axiomes de congruence (ou d'égalité) des segments qui permettent de parler de longueurs, les axiomes de congruence (ou d'égalité) des angles qui permettent de parler d'orthogonalité et enfin les axiomes de continuité (dont l'axiome d'Archimède) qui permettent de retrouver les nombres réels (chaque droite du plan étant en bijection avec la droite réelle).

On notera que la géométrie euclidienne utilise de façon essentielle les « cas d'égalité » des triangles que nous retrouverons plus loin sous le nom

3. Par exemple dans le Livre I, Proposition 1, pour construire un triangle équilatéral de base [AB], Euclide trace le cercle de centre A passant par B et celui de centre B passant par A et admet sans démonstration que ces cercles se coupent.

4. D'ailleurs Hilbert signale qu'ils pourraient aussi bien s'appeler *tables* et *chopes de bière*.

de cas d'isométrie. Chez Euclide le statut de ces « cas d'égalité » n'est pas clair (il en donne une démonstration qui n'en est pas vraiment une). Chez Hilbert le premier cas est un axiome et les autres sont des théorèmes.

B. VECTEURS, REPÈRES ET COORDONNÉES

À partir des axiomes évoqués ci-dessus on peut faire toute la géométrie (telle que le lecteur l'a apprise au collège et au lycée). On peut ainsi définir les vecteurs, leur addition et le produit scalaire $(\vec{u}|\vec{v})$ de deux vecteurs, et nous rappellerons brièvement comment ci-dessous. On caractérise l'orthogonalité de deux vecteurs en écrivant que leur produit scalaire est nul et la norme (ou longueur) d'un vecteur comme la racine carrée de son carré scalaire. On définit enfin les repères orthonormés, formés d'une origine O et de deux vecteurs unitaires et orthogonaux $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Ces repères permettent d'écrire les coordonnées des points du plan : si M est un point on écrit $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On voit ainsi que le plan est en bijection avec l'ensemble $\mathbf{R}^2$ des couples (x, y) de nombres réels. Dans une base orthonormée le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ s'écrit $(\vec{u}|\vec{u}') = xx' + yy'$.

On se reportera au paragraphe 2 ci-dessous pour des détails sur ce sujet des vecteurs.

C. RENVERSEMENT DE POINT DE VUE

L'un des intérêts des vecteurs est qu'ils fournissent une façon plus simple et plus rapide de construire la géométrie euclidienne en partant à l'envers. On prend comme plan l'ensemble $E = \mathbf{R}^2$ des couples (x, y) (ou, plus savamment, un espace affine associé à un espace vectoriel de dimension 2), on définit les droites par leurs équations analytiques (de la forme $ux + vy + w = 0$) et on munit E du produit scalaire défini par la formule ci-dessus. Ce point de vue permet de retrouver très rapidement toutes les notions usuelles de la géométrie euclidienne. C'est essentiellement celui qu'adoptent les mathématiciens d'aujourd'hui. Il présente l'avantage d'être beaucoup plus simple mathématiquement, mais l'inconvénient d'être loin de la description intuitive des objets géométriques. Une tentative pour enseigner la géométrie au lycée par la voie des espaces vectoriels a été menée dans les années 1970 (lors de la réforme dite des « maths modernes »). Elle s'est soldée par un cuisant échec et on est aujourd'hui partiellement revenu à une approche plus intuitive.

1. Géométrie plane : une approche inspirée d'Euclide

Le principe de ce qui suit est de dégager les axiomes essentiels de la géométrie et les premières propriétés que l'on peut en déduire. Le fondement de ces axiomes est essentiellement expérimental : le plan euclidien est un modèle idéal d'un plan physique (celui de la feuille de papier ou du tableau) et les axiomes choisis correspondent à l'intuition qu'on peut en avoir.

A. PLAN, POINTS, DROITES, AXIOMES D'INCIDENCE

On postule l'existence d'un ensemble, appelé **plan euclidien** et noté le plus souvent E ou P. Ses éléments sont appelés **points**. Il contient des parties remarquables appelées **droites**, avec les trois axiomes suivants, dits axiomes d'incidence :

Axiome I.1. Par deux points distincts du plan passe une droite et une seule.

Axiome I.2. Toute droite contient au moins deux points.

Axiome I.3. Il existe trois points non alignés.

La droite définie par les points A, B est notée (AB). Il résulte des axiomes que deux droites distinctes ont au plus un point commun. Deux droites sans point commun sont dites **parallèles**.

On suppose vérifié le **postulat d'Euclide** c'est-à-dire l'axiome P ci-dessous :

Axiome P. Par un point M non situé sur la droite D passe une parallèle à D et une seule.

C'est un problème non évident, qui a beaucoup agité les mathématiciens jusqu'au dix-neuvième siècle, de savoir si cet axiome peut être déduit des autres. On montre qu'il n'en est rien et qu'il y a des géométries (dites non euclidiennes) dans lesquelles tous les axiomes sont vérifiés (y compris ceux d'ordre, de congruence, etc.) sauf celui-là. Bien entendu, s'il y a des traits communs entre ces géométries, il y a aussi de notables différences (par exemple sur la somme des angles des triangles, ou sur le concours des droites remarquables). On consultera sur ce sujet [Li] ou [Har].

On montre, grâce au postulat d'Euclide, que la relation « D et D' sont parallèles ou confondues » est une relation d'équivalence dont les classes sont les directions. Ceci signifie seulement que deux droites ont **même direction** si et seulement si elles sont parallèles ou confondues.

B. AXIOMES D'ORDRE

Il s'agit des axiomes régissant la relation « A est entre B et C » pour trois points alignés. Les axiomes de Hilbert sont les suivants :

Axiome B.1. Si B est entre A et C, B est entre C et A.

Axiome B.2. Étant donnés deux points A, B il existe un point C entre A et B.

Axiome B.3. Étant donnés trois points d'une droite, un et un seul d'entre eux est entre les deux autres.

Il y a un quatrième axiome plus caché (dit axiome de Pasch) qui exprime le fait qu'une droite qui entre dans un triangle par un côté (sans passer par un sommet) en ressort nécessairement par un autre.

On voit, là encore, qu'il s'agit d'axiomes bien naturels, et le lecteur pourra, sans trop de risque, se fier à sa conception intuitive de la relation [5] « A est entre B et C ».

La relation « entre » permet de définir la notion de **segment**, noté $[AB]$, c'est l'ensemble des points situés entre A et B, et la notion de **demi-droite**. La demi-droite d'origine A qui contient B est notée $[AB)$. On peut la définir comme l'ensemble des points C tels que C soit situé entre A et B ou B entre A et C.

On postule ensuite que chaque droite D partage le plan en deux parties appelées **demi-plans** (il y a les demi-plans ouverts, pour lesquels la droite D n'est pas dans les demi-plans, et les demi-plans fermés, qui contiennent D). Les demi-plans ouverts sont caractérisés par le fait que deux points A, B sont dans le même demi-plan si et seulement si le segment $[AB]$ ne rencontre pas D. On dit encore que A et B sont du même côté [6] de D.

Une partie F de E est dite **convexe** si, lorsqu'elle contient deux points A et B, elle contient tout le segment $[AB]$, voir chapitre 5, 0.2. *(Exercice : donner des exemples de parties convexes ou non convexes du plan ; par exemple, un demi-plan est convexe : pourquoi ?).*

Un **triangle** consiste en la donnée de trois points non alignés A, B, C. On le note ABC. Le bord du triangle est la réunion des trois segments $[BC], [CA], [AB]$. L'intérieur du triangle est l'intersection des trois demi-plans limités par les droites $(BC), (CA), (AB)$ et contenant respectivement A, B, C (faire la figure). C'est une partie convexe du plan (pourquoi ?).

5. Le plus simple, si on ne cherche pas une présentation rigoureuse, est de postuler l'existence, pour une droite D et deux points distincts O et I de D, d'une bijection φ de $\mathbf{R}$ sur D qui expédie 0 sur O et 1 sur I, comme nous le ferons au paragraphe suivant. Cette bijection permet, grâce à la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$, de définir la relation « entre » sur D. Attention, il y a dans cette présentation de nombreuses difficultés mathématiques que nous écartons délibérément : il faudrait montrer que les notions définies ci-dessus ne dépendent pas du choix des points O et I, préciser quelles bijections on s'autorise et dire comment les relations d'ordre sur deux droites distinctes se correspondent, mais en fin de compte, on finit par montrer que ça marche.

6. Il faudrait pour tout cela expliciter de nouveaux axiomes. Comme notre but n'est pas de donner un traitement axiomatique complet de la géométrie, le lecteur qui insistera sera désormais renvoyé sans ménagement à Hilbert [Hi] et aux autres références.

C. MESURE DES LONGUEURS

Nous nous contenterons désormais de rappeler les propriétés essentielles des notions introduites, sans chercher à les démontrer à partir d'axiomes, et nous nous écartons à présent assez largement du traitement d'Euclide et Hilbert pour suivre une approche voisine de celle de [CF].

Une étape suivante de la construction de la géométrie est de postuler l'existence d'une mesure des longueurs. Étant donnés deux points A et B du plan, la **mesure de la longueur** du segment [AB] (ou encore la distance de A à B) est un réel $\geqslant 0$, noté AB. Il vérifie les trois propriétés suivantes :

1) On a $AB = 0$ si et seulement si $A = B$,

2) on a $AB = BA$ pour tous A, B,

3) on a $AB \leqslant AC + CB$ pour tous A, B, C (inégalité triangulaire), avec égalité si et seulement si les points sont alignés, avec C entre A et B.

Une conséquence de 3) : on a $AB \geqslant |AC - BC|$ (pourquoi ?).

Sur une droite D, si on choisit un point O comme origine, on postule alors qu'il y a deux points I et J de D tels que $OI = OJ = 1$ et qu'on obtient une bijection φ de D sur $\mathbf{R}$ en associant à tout point M de la demi-droite [OI) le nombre OM et à tout point M de [OJ) le nombre $-OM$. On pose $\varphi(M) = x_M$, c'est **l'abscisse** de M relativement au repère[7] O, I. La **mesure algébrique** d'un couple de points (M, N) (dans cet ordre) de la droite D, munie du repère O, I, est alors le réel $\overline{MN} = x_N - x_M$.

On a aussi la notion de **milieu** d'un segment : c'est l'unique point M de [AB] tel que $AM = MB$.

Si O est un point et R un réel > 0, le **cercle** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $OM = R$. Nous admettrons que le cercle a, lui aussi, une longueur. On peut définir rigoureusement cette longueur (voir chapitre 7, § 4, c'est la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans le cercle). On peut aussi mesurer la longueur des arcs de cercle. Cela nous permettra, ci-dessous, de mesurer les angles.

On renvoie le lecteur à ses livres du secondaire pour revoir les positions relatives d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles. (En particulier, le résultat suivant sera utile dans les discussions des constructions à la règle et au compas : deux cercles de centres O, O' et de rayons R, R' se coupent si et seulement si on a $|R - R'| \leqslant OO' \leqslant R + R'$.)

D. PARENTHÈSE

En vérité, dans ce texte, ce que nous noterons AB sera, le plus souvent, la longueur de AB et non pas la mesure de cette longueur. La différence

7. Quand on aura défini les vecteurs on parlera du vecteur unitaire $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et le repère sera aussi donné par O et $\vec{\imath}$.

entre ces deux notions réside essentiellement dans le fait qu'une unité a été spécifiée ou non : par exemple, la mesure, en mètres, d'une longueur l est le nombre réel 2, tandis que la longueur l est égale indifféremment à 2 m ou à 200 cm. Pour toutes précisions sur ce sujet on se reportera à l'annexe « grandeurs, mesures et nombres » de ce chapitre.

E. LE THÉORÈME DE THALÈS

Il s'agit du premier théorème essentiel de la géométrie. Il relie parallélisme et longueurs (ou mesures algébriques) :

Théorème 1.1 (Thalès). *Soient* $D_1, D_2, \ldots, D_n$ *des droites parallèles et* Δ, Δ' *deux sécantes qui coupent respectivement* D_i *en* M_i *et* M'_i. *On a, pour tous* i, j, k *tels que* $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$, *l'égalité des rapports (fig. 2) :*

$$\frac{\overline{M_iM_j}}{\overline{M_iM_k}} = \frac{\overline{M'_iM'_j}}{\overline{M'_iM'_k}}.$$

La variante suivante, dans le triangle, est encore plus connue :

Corollaire 1.2. *Soit* ABC *un triangle et soient* M, N *des points de* [AB] *et* [AC] *respectivement. Alors, la droite* (MN) *est parallèle à* (BC) *si et seulement si on a l'égalité (fig. 3) :* $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$. *Dans ce cas, ce rapport est encore égal à* $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$. *Lorsque le rapport est égal à* $1/2$ *la droite* (MN) *est une « droite des milieux » du triangle.*

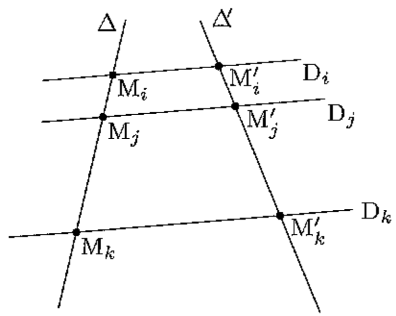

FIG. 2.

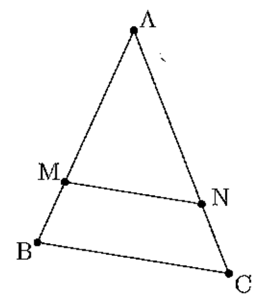

FIG. 3.

Le lecteur reviendra avec profit sur cet énoncé après avoir lu le paragraphe sur les homothéties. Pour une démonstration à l'aide des aires, voir chapitre 7, 2.9.

F. ANGLES

Soit O un point du plan et soient [OA), [OB) deux demi-droites issues de O. Supposons d'abord les points O, A, B non alignés. On note H_A^+ (resp. H_A^-) le demi-plan (fermé) limité par (OA) qui contient B (resp. qui ne contient pas B).

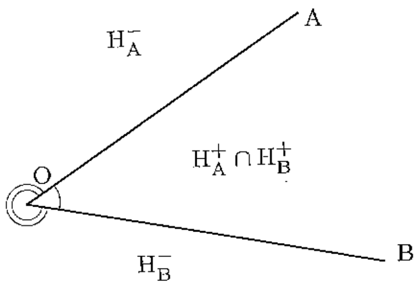

FIG. 4.

On note de même H_B^+ et H_B^- les demi-plans limités par (OB). Les demi-droites [OA), [OB) partagent alors le plan en deux parties. La première, $H_A^+ \cap H_B^+$, qui est convexe, est appelée **secteur angulaire saillant** (ou, par abus de langage, angle saillant) limité par les demi-droites. La seconde, $H_A^- \cup H_B^-$, non convexe, est appelée **secteur angulaire rentrant** (voire angle rentrant) limité par les demi-droites.

On note $[\widehat{AOB}]$ le secteur angulaire saillant (ou angle saillant) limité par les demi-droites [OA) et [OB). Si besoin est on notera $[AOB]^\vee$ le secteur angulaire rentrant limité par les mêmes droites.

Lorsque les points O, A, B sont alignés il y a deux cas :

i) Si les demi-droites [OA) et [OB) sont confondues, le secteur saillant qu'elles définissent est réduit à [OA). Le secteur rentrant est le plan tout entier.

ii) Si les demi-droites sont opposées, il n'y a plus de secteur rentrant mais deux secteurs saillants qui sont les demi-plans limités par (OA).

Nous allons maintenant mesurer les angles en utilisant pour cela la longueur des arcs de cercles.

Soient [OA), [OB) deux demi-droites issues de O. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 (une unité de longueur a été choisie). On parle alors de cercle unité ou trigonométrique et la longueur de ce cercle est notée 2π : c'est la définition du nombre π, voir chapitre 7, 4.2. Les demi-droites [OA) et [OB) coupent le cercle $\mathscr{C}$ en A′ et B′ (fig. 5).

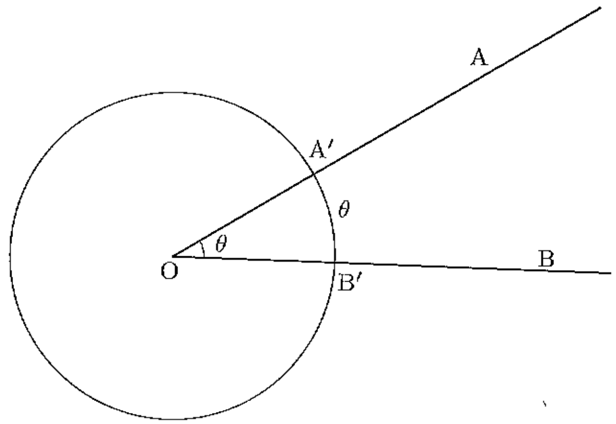

FIG. 5.

Un secteur angulaire (saillant ou rentrant) limité par [OA), [OB) coupe le cercle $\mathscr{C}$ selon un arc d'extrémités A′ et B′. La **mesure (en radians) de ce secteur** (ou, de l'angle de ce secteur) est alors, par définition, la longueur θ de l'arc correspondant. Un radian est donc la mesure d'un secteur qui découpe sur le cercle unité un arc de longueur 1. On utilise aussi comme unité d'angle le **degré** avec la relation : 180 degrés $= \pi$ radians [8].

Lorsqu'il est clair avec quelle unité d'angle on travaille, on dira encore, par un nouvel abus de langage qui consiste, comme dans le cas des longueurs, à confondre la grandeur et sa mesure, que l'angle du secteur saillant $[\widehat{AOB}]$ (par exemple) est égal à θ et on écrira simplement $\widehat{AOB} = \theta$, par exemple $\widehat{AOB} = \pi/3$, mais il est plus correct d'écrire $\widehat{AOB} = \pi/3$ *radians* ou $\widehat{AOB} = 60$ *degrés*.

Comme l'arc correspondant au secteur saillant est contenu dans un demi-cercle, l'angle correspondant est $\leqslant \pi$ (radians, bien sûr !). Au contraire, un angle rentrant est $> \pi$. Précisément, si l'angle du secteur saillant AOB vaut θ, celui du secteur rentrant AOB vaut $2\pi - \theta$.

Lorsque les points O, A, B sont alignés, on retrouve les deux cas vus ci-dessus.

i) Si A et B sont du même côté de O, les demi-droites [OA) et [OB) sont égales et l'angle $\widehat{AOB}$ est **nul**.

ii) Si O est entre A et B, les demi-droites [OA) et [OB) sont opposées

8. Finalement, qu'est-ce que l'angle d'un secteur ? C'est, en fait, ce qui caractérise tous les secteurs qui, dans une unité donnée, ont même mesure. En termes mathématiques, un angle est une classe d'équivalence de secteurs pour la relation « avoir même mesure ». On peut dire aussi que deux secteurs ont même angle s'ils sont superposables. En termes mathématiques, cela revient à dire qu'il existe une isométrie du plan qui transporte un secteur sur l'autre.

et l'angle $\widehat{AOB}$ vaut π radians ou 180 degrés. On dit alors que l'angle est **plat**.

Quand on parlera des angles d'un triangle ABC il s'agira toujours des angles saillants et on les notera $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

G. ANGLES ET PARALLÈLES

Soient D et E deux droites parallèles et soit Δ une droite qui coupe D et E respectivement en A et en B.

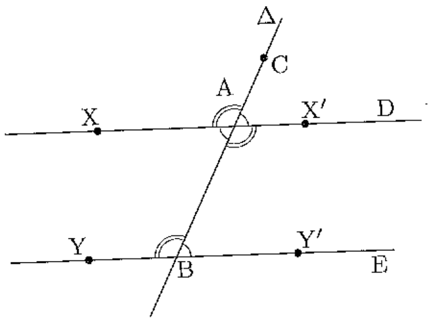

FIG. 6.

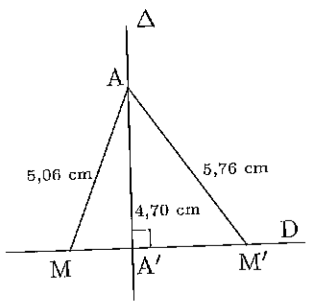

FIG. 7.

On considère des points $X', X \in D$, $Y', Y \in E$ tels que X et Y soient dans l'un des demi-plans limités par Δ et X', Y' dans l'autre (fig. 6). On a les égalités d'angles : $\widehat{X'AB} = \widehat{ABY}$ et $\widehat{XAB} = \widehat{ABY'}$ (**angles alternes-internes**). Si on prend un point C sur Δ dans le demi-plan limité par D qui ne contient pas E on a les égalités d'angles $\widehat{XAC} = \widehat{YBA}$ et $\widehat{X'AC} = \widehat{Y'BA}$ (**angles correspondants**).

H. ORTHOGONALITÉ

Un **angle droit** est un angle qui est la moitié d'un plat, donc vaut $\pi/2$ radians (ou 90 degrés). On dit que deux droites sont **orthogonales (ou perpendiculaires)** si les angles qu'elles définissent sont tous égaux à $\pi/2$. Un angle est dit **aigu** (resp. **obtus**) s'il est compris entre 0 et $\pi/2$ (resp. entre $\pi/2$ et π). Deux angles sont dits **supplémentaires** (resp. **complémentaires**) si leur somme vaut π (resp. $\pi/2$).

Étant donnés un point A et une droite D, il existe une unique droite Δ passant par A et perpendiculaire à D. Le point d'intersection A' de D et Δ s'appelle le **projeté orthogonal** de A sur D. Il réalise la plus courte distance de A à D ce qui signifie que, si $M \in D$, on a $AM \geqslant AA'$ (fig. 7). Cette distance est la distance de A à D.

Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles.

I. THÉORÈME DE PYTHAGORE, COSINUS, SINUS

Un triangle ABC est dit **rectangle** en A si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit. Le deuxième théorème fondamental du collège est le suivant :

Théorème 1.3 (Pythagore). *Soit* ABC *un triangle rectangle en* A. *On a l'égalité* $BC^2 = AB^2 + AC^2$. *Réciproquement, si on a cette relation, le triangle* ABC *est rectangle en* A.

Soient O, A, B trois points distincts du plan. On considère les points unités I et J sur les demi-droites [OA) et [OB). L'application qui à un point M de (OA) associe son projeté orthogonal N sur (OB) est appelée **projection orthogonale** de (OA) sur (OB). Pour $M \neq O$, on montre que le rapport des mesures algébriques $\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OM}}$ (calculées avec les repères O, J et O, I) ne dépend pas du choix de M sur (OA) (pourquoi ?). Ce nombre est le **rapport de projection** de (OA) sur (OB) et on montre que c'est aussi le rapport de projection de (OB) sur (OA). Il ne dépend donc que de l'angle $\widehat{AOB}$. On l'appelle **cosinus** de l'angle $\widehat{AOB}$ et on le note $\cos\widehat{AOB}$. On montre que le cosinus de $\widehat{AOB}$ est positif (resp. nul, resp. négatif) si l'angle est aigu (resp. droit, resp. obtus) et qu'il est compris entre -1 et 1.

Nous supposerons désormais que le plan est **orienté**. Cela signifie, intuitivement, qu'on se donne un sens de rotation dans le plan (soit le sens des aiguilles d'une montre, soit le sens inverse, qu'on appelle sens trigonométrique et que nous adopterons ici).

Cela va nous permettre de définir l'angle orienté de deux demi-droites [OA) et [OB) (ou encore de deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, c'est la même chose). On le notera [9] $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Quand on parle d'angles orientés, il faut bien comprendre qu'il y a deux différences, par rapport à l'angle des secteurs angulaires, un peu en sens inverse l'une de l'autre :

1) On précise quel est le premier côté de l'angle (ici [OA)) et quel est le second (ici [OB)) et on compte l'angle positivement s'il tourne dans le sens trigonométrique et négativement sinon. En particulier, on a $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Cette notion d'angle orienté intervient d'ailleurs dans la vie courante : s'il s'agit d'indiquer son chemin à un promeneur égaré, tourner à gauche et à droite ce n'est pas la même chose !

2) En revanche, on ne s'occupe que des demi-droites et on ne distingue plus entre les deux secteurs qui vont de [OA) à [OB), le saillant, qui vaut θ (avec $\theta \in [-\pi, +\pi]$) et le rentrant qui vaut $\theta - 2\pi$ (et non $2\pi - \theta$:

9. Cette notation met en jeu les vecteurs que nous définissons plus loin, mais ce n'est pas essentiel et on aurait pu noter, aussi bien, ([OA), [OB)) en faisant apparaître les demi-droites.

attention, il tourne en sens inverse du saillant). On a donc, en termes d'angles orientés, $\theta - 2\pi = \theta$, donc $2\pi = 0$! De fait, quand on travaille avec les angles orientés, on travaille « modulo 2π », comme avec les congruences.

Une propriété essentielle des angles orientés est qu'ils vérifient la **relation de Chasles** : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$. Cette relation est vraie quelles que soient les positions relatives des demi-droites (ce qui ne serait pas le cas avec des angles non orientés : pourquoi ?). Attention, là encore, il s'agit d'une égalité modulo 2π (pourquoi est-ce essentiel ?). Le fait que cette relation soit vraie indépendamment de la position des points est l'un des intérêts majeurs de la notion d'angle orienté.

On déduit en particulier de la relation de Chasles qu'on a $(\overrightarrow{OA}, -\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + \pi$ (le vecteur $-\overrightarrow{OB}$ est l'opposé de $\overrightarrow{OB}$, il est porté par la demi-droite opposée à [OB)).

Soient O, A, B trois points distincts. Soit I (resp. K) le point de [OA) (resp. [OB)) tel que OI = 1 (resp. OK = 1). On utilise les repères O, I et O, K sur les droites (OA) et (OB). On considère la droite perpendiculaire à (OA) passant par O et on oriente cette droite en prenant le point J tel que OJ = 1 et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = +\pi/2$.

Si M est un point de (OB) distinct de O et N son projeté orthogonal sur (OJ), le rapport $\frac{\overline{ON}}{\overline{OM}}$ est indépendant de M. Il est appelé **sinus** de l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et noté $\sin\theta$. Lorsque $\cos\theta$ est non nul, on pose $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

$$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \overline{OC}$$

$$\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = \overline{OS}$$

$$\tan(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OC}}$$

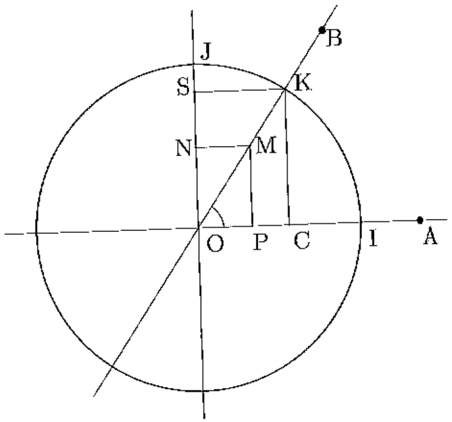

FIG. 8.

Il résulte du théorème de Pythagore qu'on a $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (pourquoi ?). On a $\cos(-\theta) = \cos\theta$, mais $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ (pourquoi ?).

Outre ces formules, il faut connaître quelques formules simples de trigonométrie, dont les formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

la formule $\sin a = \cos(\pi/2 - a)$ et surtout les valeurs des cosinus et

sinus des angles remarquables suivants : $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ et de leurs supplémentaires [10].

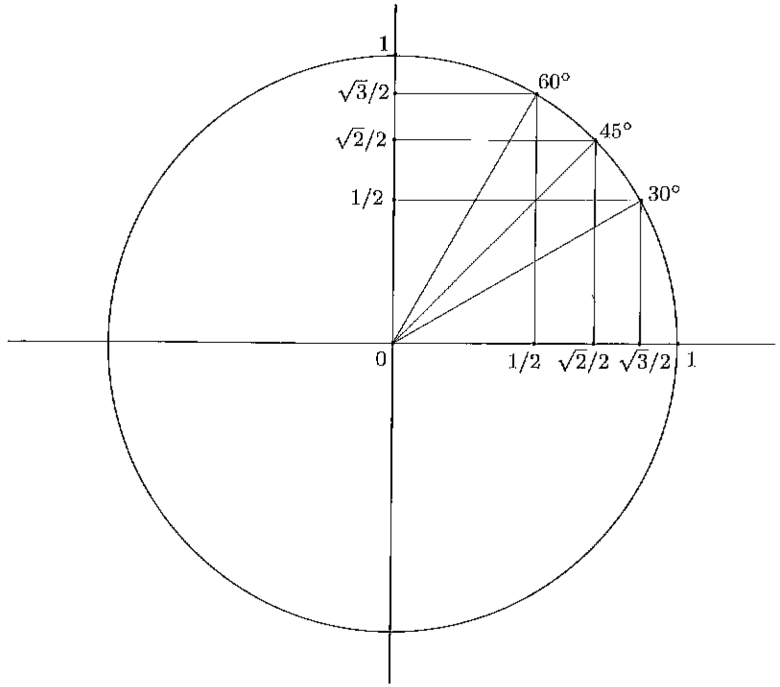

FIG. 9.

J. MÉDIATRICE, BISSECTRICE

Étant donnés deux points A et B du plan, l'ensemble des points M équidistants de A et B (c'est-à-dire vérifiant MA = MB) est la droite perpendiculaire à (AB) en le milieu I de [AB] *(Exercice : le montrer en utilisant Pythagore)*. On l'appelle la **médiatrice** de [AB].

Étant donné un secteur angulaire saillant $[\widehat{BAC}]$ il existe une demi-droite contenue dans le secteur qui est telle que les distances de chacun de ses points aux côtés de l'angle soient égales. Cette demi-droite est la **bissectrice intérieure** du secteur (ou encore de l'angle $\widehat{BAC}$) et, si M est un de ses points, on a $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$.

10. Le mieux pour se souvenir de tout cela est d'avoir en tête le cercle trigonométrique et la position sur ce cercle de ces angles remarquables. C'est par ailleurs fort utile pour partager les gâteaux.

K. TRIANGLES

On montre que la somme des angles d'un triangle vaut π radians (ou 180 degrés). Ce théorème vaut pour les angles non orientés (saillants), ou pour les angles orientés (à condition de les compter tous dans le même sens et de calculer modulo 2π).

Les droites remarquables.
Soit ABC un triangle. Les propriétés suivantes sont bien connues mais c'est un bon exercice de les redémontrer.

Les **médianes** de ABC sont les droites AA', BB', CC' qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés. Elles sont concourantes en un point G appelé **centre de gravité** du triangle et situé au tiers de chaque médiane à partir de la base.

Les médiatrices des côtés du triangle sont concourantes en un point O qui est équidistant de A, B, C. C'est donc le centre du cercle **circonscrit** à ABC.

Les **hauteurs** AA', BB', CC' sont les droites qui joignent les sommets à leurs projetés orthogonaux sur les côtés opposés. Elles concourent en un point H appelé **orthocentre** du triangle.

Les bissectrices intérieures des angles du triangle concourent en un point I qui est équidistant des côtés du triangle. Le cercle de centre I et de rayon la distance commune aux côtés est tangent aux trois côtés. C'est le cercle **inscrit** dans le triangle ABC.

La formule d'Al-Kashi.
C'est une généralisation de Pythagore : dans un triangle quelconque ABC, si on pose $a = BC, b = CA, c = AB$ on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. *(Exercice, le démontrer en considérant la hauteur* BB' *du triangle et en appliquant Pythagore.)*

L. TRIANGLES PARTICULIERS

Un triangle ABC est dit **isocèle** s'il a deux côtés de même longueur [11], disons $AB = AC$. Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont alors égaux. La médiane issue de A est aussi hauteur, bissectrice et médiatrice.

Un triangle ABC est dit **équilatéral** si ses trois côtés sont « égaux ». Ses trois angles sont alors égaux à $\pi/3$ (ou 60 degrés) et ses médianes, hauteurs, etc. sont confondues. *Exercice : calculer la longueur des hauteurs en fonction de celle des côtés.*

11. Nous nous laisserons souvent aller à dire, avec la caution d'Euclide, que les côtés en question sont « égaux », et de même pour les angles.

M. QUADRILATÈRES

Un **quadrilatère** consiste en la donnée de quatre points A, B, C, D, pris dans cet ordre et tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. Les points A, B, C, D sont les **sommets** du quadrilatère. Les **côtés** du quadrilatère sont les segments [AB], [BC], [CD], [DA], ses **diagonales** sont les segments [AC] et [BD].

Un quadrilatère $Q = ABCD$ est dit **convexe** si, pour tout côté [MN], les deux autres sommets sont du même côté de la droite (MN). Il revient au même de dire que ses diagonales se coupent (pour toutes précisions, voir chapitre 5, 1.11). Il est dit **croisé** si deux de ses côtés se coupent en un point autre qu'un sommet. Il est dit **concave** s'il n'est ni convexe ni croisé.

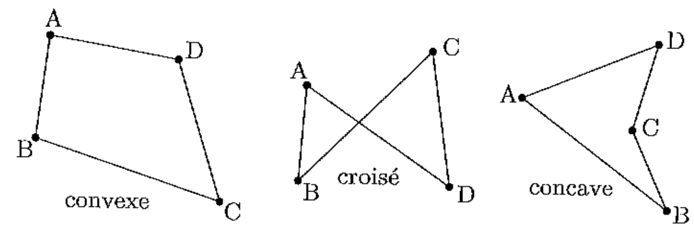

FIG. 10.

Un quadrilatère convexe ou concave détermine deux régions du plan, l'une, appelée intérieur, est bornée, l'autre non. La somme des angles d'un quadrilatère convexe ou concave est égale à 2π ou 360 degrés. (Les angles correspondent aux secteurs qui rencontrent l'intérieur du quadrilatère.)

N. PARALLÉLOGRAMMES, ETC

On dit qu'un quadrilatère ABCD est un **parallélogramme** si les droites (AB) et (CD) ainsi que (BC) et (DA) sont parallèles (autrement dit si les côtés opposés sont parallèles).

Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu, ou encore s'il est convexe et si les côtés [AB] et [CD] sont parallèles et de même longueur.

Un **rectangle** est un parallélogramme qui a un angle droit (et donc ses quatre angles droits). Il est caractérisé, parmi les parallélogrammes, par le fait que ses diagonales sont égales.

Un **losange** est un parallélogramme dont tous les côtés sont égaux. Il est caractérisé, parmi les parallélogrammes, par le fait que ses diagonales sont perpendiculaires.

Un **carré** est un quadrilatère qui est à la fois un losange et un rectangle. Ses quatre angles sont droits, ses quatre côtés sont égaux. Ses diagonales sont égales et perpendiculaires.

Enfin, un **trapèze** est un quadrilatère convexe qui a deux côtés parallèles.

2. Vecteurs

Dans tout ce qui suit, E désigne un plan euclidien. Nous donnons dans ce paragraphe un aperçu sommaire du calcul vectoriel.

A. VECTEURS

Soit (A, B) un couple de points (disons distincts) de E (attention, il y a un ordre : A puis B ; on dit parfois que le couple (A, B) est un bipoint de E). Le couple (A, B) définit une direction (celle de la droite (AB)), un sens (de A vers B) et une longueur (la longueur AB). On associe à un tel couple un objet appelé **vecteur**, noté $\overrightarrow{AB}$. Les règles de calcul avec les vecteurs sont les suivantes :

i) Égalité de deux vecteurs.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur. On vérifie que cela revient à dire que ABDC est un parallélogramme (faire un dessin pour s'en convaincre, attention à l'ordre). Les bipoints (A, B) et (C, D) définissent alors un même vecteur [12]. On dit parfois que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{v}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est dit nul si on a $A = B$.

Étant donnés un point O et un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ il existe un unique point M du plan tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$. *(Exercice : le montrer à l'aide du postulat d'Euclide.)*

ii) Produit par un scalaire.

Soient A, B deux points distincts et $\lambda \in \mathbf{R}$. On définit le vecteur $\lambda \overrightarrow{AB}$ comme le vecteur $\overrightarrow{AC}$ où C est le point de la droite (AB) qui vérifie $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \lambda$. Dans le cas du vecteur nul on pose $\lambda \vec{0} = \vec{0}$.

iii) Addition de deux vecteurs.

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. On peut les représenter sous la forme $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{ON}$. On définit $\vec{v} + \vec{w}$ comme le vecteur $\overrightarrow{OP}$ tel que le quadrilatère OMPN soit un parallélogramme. Si I est le milieu de MN on a $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OI}$. Le vecteur $\vec{v} + \vec{w}$ ne dépend pas du choix du point O.

12. Un vecteur est donc une classe d'équivalence de bipoints pour la relation ci-dessus : $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

L'interprétation physique des vecteurs comme des forces est le meilleur moyen de comprendre la motivation de cette définition.

Une conséquence essentielle de cette définition de l'addition des vecteurs est la **relation de Chasles** : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. *(Exercice : établir cette relation.)*

iv) Orthogonalité de deux vecteurs, norme d'un vecteur.

Deux vecteurs $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$ sont dits **orthogonaux** si les segments [AB] et [CD] le sont. Cette notion ne dépend pas des représentants choisis (cela signifie que, si on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\overrightarrow{A'B'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{C'D'}$). On convient que le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

On appelle **norme du** vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ la longueur du segment [AB]. Elle ne dépend pas du représentant choisi.

B. REPÈRES ORTHONORMÉS

Un **repère orthonormé** consiste en la donnée de trois points O, I, J tels que [OI] et [OJ] soient perpendiculaires et de longueur 1. Il revient au même de se donner une origine O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ orthogonaux et de norme 1 en prenant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Lorsque le plan est orienté, un repère orthonormé O, I, J est dit **direct** si l'angle $\widehat{IOJ}$ est égal à $+\pi/2$.

C. COORDONNÉES

Soit $O, \vec{i}, \vec{j}$ un repère orthonormé.

Tout vecteur $\vec{v}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Les nombres x et y sont les coordonnées du vecteur $\vec{v}$.

Si M est un point du plan le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit donc de manière unique $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Les réels x et y sont les **coordonnées** de M dans le repère donné, x est son **abscisse** et y son **ordonnée**.

Le plan E, muni d'un repère orthonormé, est donc en bijection avec l'ensemble $\mathbf{R}^2$ des couples (x, y).

D. PRODUIT SCALAIRE

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs, que l'on écrit $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{ON}$. Le **produit scalaire** de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre $(\vec{v} \mid \vec{w}) = \mathrm{OM}\,\mathrm{ON} \cos\theta$ où θ est l'angle $\widehat{MON}$.

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. La norme du vecteur $\vec{v}$ est la racine de son carré scalaire $(\vec{v} \mid \vec{v})$. *(Exercice : vérifier ces propriétés.)*

Si $O, \vec{i}, \vec{j}$ est un repère orthonormé, et si on a deux vecteurs $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, on a $(\vec{v} \,|\, \vec{v}') = xx' + yy'$. *(Exercice : le démontrer.)*

3. Transformations

A. ISOMÉTRIES : DÉFINITION

On travaille toujours dans un plan euclidien orienté E.

Une **isométrie** u est, par définition, une transformation du plan qui conserve les longueurs. Cela signifie que si on a $A' = u(A)$ et $B' = u(B)$ on en déduit $A'B' = AB$. On montre qu'une isométrie est toujours une application bijective du plan sur lui-même et que son application réciproque est aussi une isométrie.

Le théorème suivant fait la liste des principales propriétés des isométries.

Théorème 3.1. *Soit $u : E \to E$ une isométrie. On a les propriétés suivantes :*

0) *u conserve les longueurs,*
1) *u conserve l'alignement, le parallélisme, les milieux,*
2) *u conserve les angles non orientés,*
3) *u conserve l'orthogonalité,*
4) *u transforme un repère orthonormé en un repère orthonormé.*

Le point 2) peut se préciser en termes d'angles orientés : il y a deux sortes d'isométries, celles qui conservent les angles orientés (y compris leur signe) et qu'on appelle **déplacements** ou **isométries positives** et celles qui transforment un angle orienté en son opposé. On les appelle **antidéplacements** ou **isométries négatives**. *Exercice : que peut-on dire de la composée de deux isométries positives, d'une positive et d'une négative, de deux négatives ?*

Le point 4) admet une réciproque : étant donnés deux repères orthonormés O, I, J et O′, I′, J′ il existe une unique isométrie qui envoie O sur O′, I sur I′ et J sur J′.

Nous allons donner ci-dessous la liste exhaustive des isométries du plan. Un bon exercice consiste à préciser les diverses composées possibles $u \circ v$ de ces isométries (on pourra utiliser 3.2), en se demandant toujours si elles commutent (c'est-à-dire si on a $u \circ v = v \circ u$).

B. LISTE DES DÉPLACEMENTS

Il y a deux sortes de déplacements : les translations et les rotations.

La **translation** de vecteur $\vec{v}$, notée $t_{\vec{v}}$, est l'application de E dans E qui à un point M associe le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. C'est une isométrie. Elle

a une propriété supplémentaire : l'image d'une droite D par une translation est une droite D′ parallèle à D. Une translation de vecteur non nul n'a pas de point fixe.

La **rotation** de centre O et d'angle (orienté) θ est la transformation, notée $\rho(O, \theta)$, qui à un point M de E associe le point M′ tel que $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$. Une rotation de centre O et d'angle non nul a un seul point fixe : O. Parmi les rotations de centre O l'une joue un rôle particulier, c'est la rotation d'angle π qui associe à M le point M′ tel que $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. On l'appelle aussi **symétrie centrale** de centre O et on la note σ_O. La composée $\sigma_O \circ \sigma_O$ est l'identité.

Notons que l'identité peut être considérée comme une translation (de vecteur nul) ou comme une rotation (d'angle nul).

C. LISTE DES ANTIDÉPLACEMENTS

Il y en a aussi deux sortes : les symétries par rapport aux droites (ou symétries axiales) et les symétries glissées.

La **symétrie** par rapport à la droite D (ou d'axe D) est la transformation, notée σ_D, qui à un point M associe l'unique point M′ tel que D soit la médiatrice de MM′. Si H est le projeté orthogonal de M sur D, il revient au même de dire que l'on a $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$. La symétrie σ_D admet tous les points de D comme points fixes. On a $\sigma_D \circ \sigma_D = \mathrm{Id}_E$.

Une **symétrie glissée** est la composée d'une symétrie σ_D et d'une translation $t_{\vec{v}}$ de vecteur parallèle à D et non nul. Cette transformation n'a pas de point fixe. *Exercice : comparer $s = \sigma_D \circ t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{v}} \circ \sigma_D$ et calculer $s \circ s$.*

D. LES SYMÉTRIES ENGENDRENT LES ISOMÉTRIES

On a le résultat suivant qui montre que les isométries s'écrivent comme composées (on dit aussi parfois produit) de symétries axiales :

Théorème 3.2. *Toute isométrie s'obtient comme composée de symétries par rapport à des droites. Précisément :*

1) *tout déplacement s'écrit comme composé de deux symétries,*
2) *tout antidéplacement est une symétrie ou est composé de trois symétries (c'est le cas d'une symétrie glissée).*

On vérifie que le produit de deux symétries d'axes parallèles est une translation et le produit de deux symétries d'axes concourants une rotation. *Exercice : préciser le vecteur de cette translation ou l'angle de la rotation. Montrer qu'on a une certaine latitude sur le choix de l'axe de l'une des deux symétries et que cela permet de calculer commodément les composées.*

E. LES HOMOTHÉTIES

On appelle **homothétie** de centre O et de rapport $k \in \mathbf{R}$ et on note $h(\mathrm{O}, k)$ la transformation qui à un point M associe le point M′ défini par $\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

Les homothéties conservent encore l'alignement, le parallélisme, les angles, l'orthogonalité, les milieux, mais, attention, pas les longueurs : une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$. Comme les translations, les homothéties de rapport non nul transforment une droite D en une droite parallèle à D.

4. Compléments

A. LES CAS D'ISOMÉTRIE DES TRIANGLES

Les théorèmes qui suivent sont à la base de la géométrie telle que la pratiquait Euclide et telle qu'on l'enseignait encore au collège au début des années 1960 (à l'époque les transformations n'étaient pas enseignées dans les classes et ces théorèmes étaient, en fait, des axiomes, avec une justification expérimentale). Ils ont été injustement mis à l'écart depuis, car ils peuvent être très utiles. Il s'agit de dire à quelle condition, étant donnés deux triangles ABC et A′B′C′, il existe une isométrie u telle que $u(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$, $u(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$, $u(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$. Il y a quatre théorèmes, que le lecteur illustrera par les figures appropriées :

Théorème 4.1 : premier cas d'isométrie. *On suppose que les triangles* ABC *et* A′B′C′ *ont deux côtés « égaux » (autrement dit de même longueur*[13]*) et les angles compris entre ces côtés égaux (par exemple,* $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$, $\mathrm{AC} = \mathrm{A'C'}$ *et* $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{B'A'C'}}$*). Alors les triangles sont isométriques (précisément, dans l'exemple, il existe une isométrie u telle que l'on ait* $u(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$, $u(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$, $u(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$*).*

Démonstration. On commence par envoyer A sur A′ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$. On est ainsi ramené au cas où $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$. On envoie alors B sur B′ par la rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}'})$. C'est possible car on a $\mathrm{AB} = \mathrm{AB}'$. On est ramené au cas $\mathrm{A} = \mathrm{A}', \mathrm{B} = \mathrm{B}'$. Il y a maintenant deux cas selon que les angles orientés $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ et $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}'})$ sont égaux ou opposés. S'ils sont égaux, les demi-droites [AC) et [AC′) sont les mêmes et, comme $\mathrm{AC} = \mathrm{AC}'$, on a $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$ et on a fini. Sinon, on effectue la symétrie d'axe (AB). Comme c'est un antidéplacement, elle change le signe des angles orientés et on est ramené au cas précédent.

13. On utilisait autrefois le mot égal en un sens plus large qu'aujourd'hui. Ainsi, on parlait de segments égaux pour dire qu'ils avaient même longueur, de triangles égaux pour dire qu'ils étaient isométriques (Euclide va même jusqu'à employer ce mot pour des triangles de même aire). Dans les mathématiques actuelles on réserve ce mot d'égalité pour dire que les objets sont les mêmes, mais nous dérogerons parfois à cette règle.

Remarque. Ce théorème (comme les suivants) est intuitivement clair : il signifie que, sous les hypothèses faites, les deux triangles sont « superposables » et c'est ainsi qu'on le justifiait autrefois au collège. Mathématiquement, si l'on ne dispose pas de l'attirail de toutes les transformations, on peut fonder ces résultats sur une idée assez simple. On postule qu'il y a dans le plan un groupe de transformations (qu'on peut appeler « mouvements » et qui correspondent à l'idée intuitive qu'on se fait de déplacer et de retourner des objets du plan). On suppose que ce groupe est « transitif sur les drapeaux point, demi-droite, demi-plan », ce qui signifie que si l'on a deux triplets $(\mathrm{A}, \mathrm{D}, \mathrm{P})$ et $(\mathrm{A}', \mathrm{D}', \mathrm{P}')$ où A est un point, D une demi-droite d'origine A et P un demi-plan limité par D, et de même pour $(\mathrm{A}', \mathrm{D}', \mathrm{P}')$, il existe une transformation qui envoie A sur A′, D sur D′ et P sur P′. Les notions de longueur et d'angle sont définies à partir de ces mouvements : on peut envoyer des points A sur A′ et B sur B′ si et seulement si les « longueurs » AB et A′B′ sont égales. De même pour des demi-droites de même sommet, on peut envoyer [OA) et [OB) sur [O′A′) et [O′B′) si et seulement si les angles $\widehat{\mathrm{AOB}}$ et $\widehat{\mathrm{A'O'B'}}$ sont égaux. On peut alors prouver les cas d'isométrie, à partir de ces seules données.

Théorème 4.2 : deuxième cas d'isométrie. *On suppose que les triangles* ABC *et* A′B′C′ *ont deux angles et un côté égaux (par exemple,* $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$, $\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{A'B'C'}}$ *et* $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{B'A'C'}}$ *; comme la somme des angles d'un triangle vaut* π *les angles en* C *et* C′ *sont égaux eux aussi). Alors les triangles sont isométriques (précisément, dans l'exemple, il existe une isométrie u telle que l'on ait* $u(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$, $u(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$, $u(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$*).*

Démonstration. La démonstration est analogue. On se ramène au cas $\mathrm{A} = \mathrm{A}', \mathrm{B} = \mathrm{B}'$ par translation et rotation et, quitte à faire une symétrie, on peut supposer les demi-droites [AC) et [AC′) égales. L'égalité des angles en B montre que les demi-droites [BC) et [BC′) sont égales ou symétriques par rapport à (AB). Dans le premier cas on a $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$ et on a gagné. Le second cas est impossible car les demi-droites [AC′) et [BC′) ne seraient pas dans le même demi-plan limité par (AB), donc ne se rencontreraient pas, ce qui est absurde.

Remarque. Attention, pour appliquer ce théorème, il faut prendre garde que les sommets doivent être « homologues », c'est-à-dire que les côtés égaux doivent avoir pour extrémités les sommets en lesquels les angles sont égaux. Sinon, le théorème peut être en défaut. Ainsi, si ABC est un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issu de A, les triangles ABC et ABH ne sont pas isométriques bien qu'on ait l'égalité d'un côté $\mathrm{AB} = \mathrm{AB}$ et de deux angles $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{AHB}}$ et $\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{ABH}}$.

Théorème 4.3 : troisième cas d'isométrie. *On suppose que les triangles* ABC *et* A'B'C' *ont leurs trois côtés égaux (par exemple,* $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$*). Alors les triangles sont isométriques (précisément, dans l'exemple, il existe une isométrie* u *telle que l'on ait* $u(A) = A'$, $u(B) = B'$, $u(C) = C'$*).*

Démonstration. Le début de la démonstration est identique : on peut supposer $A = A'$, $B = B'$ et C et C' dans le même demi-plan limité par (AB). On conclut alors en notant que C (ou C') est l'unique point de ce demi-plan à l'intersection des cercles de centres A et B et de rayons AC et BC. Une autre méthode consiste à se ramener au premier cas grâce à la formule d'Al-Kashi.

Théorème 4.4 : cas d'isométrie des triangles rectangles. *On suppose que les triangles* ABC *et* A'B'C' *sont rectangles en* A *et* A' *et ont deux côtés égaux (mais pas nécessairement les côtés de l'angle droit, par exemple,* $AB = A'B'$, $BC = B'C'$*). Alors les triangles sont isométriques (précisément, dans l'exemple, il existe une isométrie* u *telle que l'on ait* $u(A) = A'$, $u(B) = B'$, $u(C) = C'$*).*

Démonstration. Le résultat est évident avec Pythagore.

B. DEUX EXEMPLES D'APPLICATIONS

Exemple 1. Soit ABC *un triangle isocèle de base* [BC]*. La médiatrice de* [AC] *coupe* (BC) *en* D*, que l'on suppose extérieur à* [BC]*. On trace* (AD) *et on porte une longueur* $AE = BD$ *sur* (AD)*, de l'autre côté de* A *par rapport à* D*. Montrer que* CDE *est isocèle.*

Indication : Montrer que les triangles ADB et CEA sont isométriques.

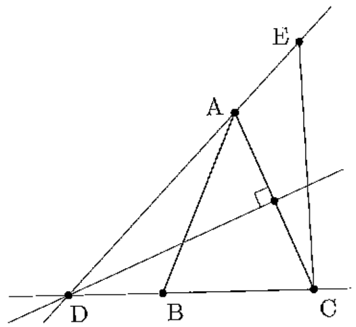

FIG. 11.

Exemple 2. Soit ABC *un triangle. On suppose que les hauteurs* BB' *et* CC' *sont « égales ». Montrer que* ABC *est isocèle.*

Indication : Considérer les triangles rectangles BC'C et CB'B ou les triangles rectangles ABB' et ACC'.

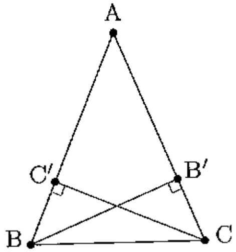

FIG. 12.

C. QUELQUES COMPLÉMENTS SUR LES ANGLES

Il s'agit de théorèmes mettant en jeu des angles inscrits, c'est-à-dire des angles $\widehat{ABC}$ avec A, B, C sur un cercle.

Théorème 4.5 : angle droit et demi-cercle. 1) *Soit* Γ *un cercle de diamètre* [BC] *(c'est-à-dire centré au milieu de* [BC] *et passant par* B *et* C*) et soit* A *un point de* Γ *distinct de* B *et* C*. Alors le triangle* ABC *est rectangle en* A*.*

2) *Réciproquement, si* ABC *est rectangle en* A *et si* O *est le milieu de* [BC] *on a* $OA = OB = OC$*, de sorte que* A *est sur le cercle de diamètre* [BC]*.*

Démonstration. 1) Soit O le centre de Γ. Comme on a $OA = OB = OC$, les triangles OAB et OAC sont isocèles. Si on pose $\widehat{ABO} = \alpha$ et $\widehat{ACO} = \beta$, on a $\widehat{BAO} = \alpha$ et $\widehat{OAC} = \beta$, d'où $\widehat{BAC} = \alpha + \beta$.

Mais, comme la somme des angles du triangle ABC vaut π, on a $2\alpha + 2\beta = \pi$, d'où $\widehat{BAC} = \alpha + \beta = \pi/2$.

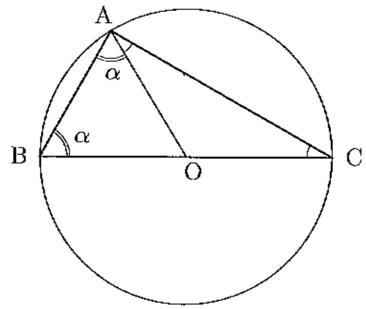

FIG. 13.

2) Soit M le milieu de [AC]. La droite (OM) est une droite des milieux de ABC donc parallèle à (AB), donc perpendiculaire à (AC). C'est à la fois une médiane et une hauteur dans le triangle AOC, qui est donc isocèle en O, de sorte qu'on a $OA = OC = OB$.

Théorème 4.6 : angle inscrit et angle au centre. *Soient* Γ *un cercle de centre* O*,* B *et* C *deux points distincts de* Γ*. On suppose* B, O, C *non alignés. Soit* A *un point de* Γ *situé dans le demi-plan ouvert limité par* (BC) *qui contient* O*. On a l'égalité d'angles :* $2\,\widehat{BAC} = \widehat{BOC}$*.*

Démonstration. Il y a deux cas de figure selon que O est à l'intérieur du triangle ABC ou non. Traitons le premier, l'autre est analogue en utilisant une différence d'angles au lieu d'une somme.

Soit M le point diamétralement opposé à A sur Γ. Comme les triangles OAB et OAC sont isocèles on a les deux égalités : $2\widehat{BAO} = \pi - \widehat{BOA} = \widehat{BOM}$ et $2\widehat{OAC} = \pi - \widehat{COA} = \widehat{MOC}$. Le théorème en résulte par addition.

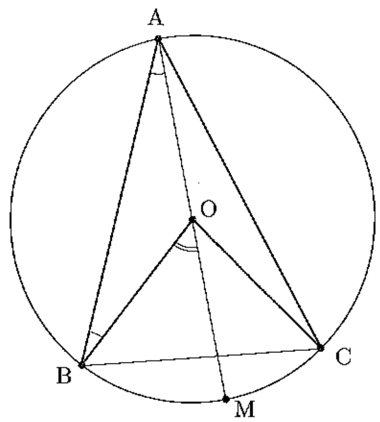

FIG. 14.

Corollaire 4.7. *Soit* Γ *un cercle et soient* A, B, C, D *quatre points distincts de* Γ.

1) *Si* C *et* D *sont dans le même demi-plan limité par* (AB) *on a* $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. *Si* C *et* D *sont dans deux demi-plans différents limités par* (AB) *on a* $\widehat{ACB} = \pi - \widehat{ADB}$.

2) *Réciproquement, soient* A, B, C, D *quatre points du plan tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés. Si* A, B, C, D *vérifient* $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ *avec* C *et* D *du même côté de* (AB) *ou* $\widehat{ACB} = \pi - \widehat{ADB}$ *avec* C *et* D *de part et d'autre de* (AB), *les quatre points sont cocycliques.*

Démonstration. 1) La première assertion vient de 4.6. Pour la seconde on considère d'abord le cas particulier où le point D est diamétralement opposé à C. Dans ce cas on conclut en considérant les deux triangles rectangles ABD et ACD. Le cas général s'ensuit grâce à la première assertion.

2) Traitons le premier cas, l'autre est analogue. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC. Supposons que D n'est pas sur Γ. La demi-droite [AD) recoupe Γ en E. On a alors $\widehat{ACB} = \widehat{AEB}$ par le point 1), d'où $\widehat{ADB} = \widehat{AEB}$ et cela contredit le fait que la somme des angles du triangle BED vaut π.

Remarque. On peut aussi formuler ces résultats avec des angles orientés. Cela présente l'avantage de ne pas être obligé de recourir à la considération de plusieurs cas de figures.

D. EXEMPLES D'APPLICATIONS

Exemple 1. Soient ABC un triangle et H son orthocentre. Soit H′ le symétrique de H par rapport à la droite (BC). Montrer que H′ est sur le cercle circonscrit à ABC.

Exemple 2. Soit ABC un triangle et soient P, Q, R trois points situés respectivement sur [BC], [CA], [AB]. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, BRP et CPQ ont un point commun.

Annexe : grandeurs, mesures et nombres

Dans cette annexe, nous avons cru bon de tenter de préciser les rapports entre les notions de grandeur, de mesure et de nombre et d'expliciter les choix de ce livre à ce sujet. Il nous semble en effet que c'est une question centrale dans l'enseignement, notamment élémentaire, et qu'il est important que les professeurs y aient réfléchi.

A. PROBLÉMATIQUE

Dans la pratique, une grandeur est associée à un objet matériel et sa **nature** correspond à une certaine caractéristique de l'objet, perçue par nos sens. Quiconque a déplacé des meubles sait que plusieurs paramètres différents sont à prendre en compte : la longueur du meuble (ou plus précisément ses diverses dimensions), pour pouvoir franchir les portes ou les cages d'escaliers, son aire, pour déterminer la place qu'il occupera au sol, son volume, pour évaluer l'encombrement qu'il induira dans la pièce, sa masse, pour choisir les (gros) bras des porteurs.

Lorsqu'une grandeur a été identifiée, on constate qu'entre des grandeurs de même nature on a une notion d'**égalité** et une relation d'**ordre** (total). Par exemple, s'agissant de longueurs, on peut dire si une personne est plus petite qu'une autre, plus grande, ou de même taille. Pour cela, il suffit de mettre dos à dos les personnes (ce faisant, on postule implicitement que la grandeur est invariante par déplacement). S'il est question de masse, on peut aussi décider si un objet est plus léger qu'un autre, plus lourd, ou pareil, mais on a besoin cette fois d'un instrument plus ou moins précis : les deux mains qui soupèsent ou la balance Roberval, par exemple.

On a aussi, en général, une **addition** des grandeurs. Ainsi, pour les longueurs on peut mettre bout à bout des bâtons et évaluer à l'œil la longueur somme. Pour les masses, si on a deux objets, on peut soupeser l'un, puis l'autre, poser ensuite l'un des objets sur l'autre et soulever les deux ensemble, la somme des masses étant alors perçue *via* l'effort musculaire nécessaire à cette opération.

Le cas de l'aire est particulièrement révélateur. Le concept d'aire est très présent chez Euclide (même s'il n'y est pas totalement explicité). L'addition des aires de deux parties du plan correspond à la réunion (disjointe) des deux parties. Pour la comparaison des aires il y a d'abord l'inclusion : « le tout est plus grand que la partie » comme disaient les Anciens, mais aussi la procédure de découpage et recollement : si on découpe une partie A en parties disjointes, que l'on déplace ces parties, et qu'on les recolle, sans perte ni chevauchement, on obtient une partie B de même aire que A. C'est ainsi qu'on montre, par exemple, l'égalité des aires d'un rectangle et d'un parallélogramme de même base et même hauteur. Le lecteur trouvera au chapitre 7 une multitude d'applications de cette procédure (et notamment l'une des preuves du théorème de Pythagore, voir chapitre 7, § 2.*B*). Pour les Grecs, la grandeur aire a donc un sens géométrique : deux polygones ont même aire si l'on peut passer de l'un à l'autre par découpage et recollement. En termes savants, l'aire est la classe d'équivalence des parties du plan pour cette relation. On voit que cette grandeur existe indépendamment de toute notion de mesure. En vérité, dans le cas des polygones, le théorème de Bolyai (voir chapitre 7, Th. 3.2) montre que cette notion géométrique d'aire et celle obtenue au moyen d'une mesure sont équivalentes.

On constate ainsi que, dans l'histoire, la notion de grandeur a précédé celle de mesure et même celle de nombre (au moins pour les nombres fractionnaires et réels). Une citation de Jean-Jacques Rousseau (dans *Les confessions*), à propos de l'identité $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, montre que ce souci de revenir aux grandeurs géométriques pour interpréter les calculs était encore très fort au XVIIIe siècle :

> *Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l'application de l'algèbre à la géométrie. Je n'aimais pas cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle. La première fois que je trouvai par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties, et du double produit de l'une par l'autre, malgré la justesse de ma multiplication, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. Ce n'était pas que je n'eusse un grand goût pour l'algèbre en n'y considérant que la quantité abstraite ; mais appliquée à l'étendue, je voulais voir l'opération sur les lignes ; autrement je n'y comprenais plus rien.*

B. AXIOMES DES GRANDEURS

L'une des vertus essentielles des mathématiques est de dégager des propriétés communes à différentes situations concrètes et de les ériger en axiomes qui permettent de travailler dans un cadre unique. C'est ce que nous faisons maintenant à propos des grandeurs, en formalisant les remarques ci-dessus. La grandeur qui sert de modèle est la longueur, avec sa représentation sur une droite.

Le système d'axiomes proposé ci-dessous est inspiré de celui de Bourbaki (voir [B]), mais il n'est pas si éloigné de ce que pratiquait Euclide dans le livre V des *Éléments* consacré aux grandeurs.

Définition 5.1. *Soit* E *un ensemble (les objets). Une* **grandeur** *définie sur* E *est une application g de* E *dans un ensemble* G *(l'ensemble des grandeurs du type considéré). On suppose que* G *est muni d'une relation d'ordre total possédant un plus petit élément noté* 0 *(la grandeur nulle), et d'une addition, commutative, associative et compatible avec l'ordre, pour laquelle* 0 *est un élément neutre, et qu'on a les quatre axiomes suivants :*

1) *On a une soustraction des grandeurs : étant donnés $x, y \in$ G avec $x < y$, il existe $z \in$ G telle que $x + z = y$.*

2) *On a une division des grandeurs : étant donné $x \in$ G et $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $y \in$ G telle que $x = ny = y + y + \cdots + y$ (n fois).*

3) *On a l'axiome d'Archimède : pour tout x positif de* G *et tout $y \in$ G il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $nx > y$.*

4) *On a un axiome de continuité : tout sous-ensemble majoré* X *de* G *admet une borne supérieure s* [14].

Remarques 5.2. 1) On constatera que ces axiomes reprennent les constatations intuitives : à chaque objet on associe sa grandeur, et les grandeurs sont munies d'un ordre et d'une addition. Quant aux propriétés supplémentaires, l'exemple de la longueur montre qu'elles sont assez naturelles, les deux propriétés qui ne sont pas totalement évidentes sont l'existence du zéro (on se souviendra que ce n'est que tardivement qu'il est apparu dans l'histoire de l'humanité) et l'axiome de continuité. Le lecteur perspicace, qui aura noté que les propriétés énumérées ici ressemblent à celles des nombres réels $\geqslant 0$, se doute que le dernier axiome n'est là que pour que l'ensemble des grandeurs soit vraiment isomorphe à $\mathbf{R}^+$. Cet axiome est notamment indispensable pour concevoir l'aire du disque comme borne supérieure de celles des polygones réguliers inscrits.

2) Ces axiomes fournissent une vision idéalisée des situations pratiques. En particulier, l'axiome de division ne correspond pas nécessairement à la réalité puisque la physique nous enseigne qu'il n'y a pas d'objet plus petit que la plus petite particule. De plus, ils ne valent pas pour toutes les grandeurs. Ainsi, il y a des grandeurs bornées (par exemple l'angle ou la masse volumique) pour lesquelles l'addition n'est pas toujours possible.

3) Dans l'axiome 1, la quantité z vérifiant $x+z=y$ est unique. En effet, si on avait un autre t avec $x+t=y$, on aurait, par exemple, $z<t$, mais alors, la compatibilité de l'addition et de l'ordre imposerait $x+z<x+t$, ce qui est absurde. On note alors $z = y - x$. Le même argument montre que, dans l'axiome 2, la grandeur y vérifiant $ny = x$ est unique. On pose $y = x/n$.

4) Si x est une grandeur, on a défini nx pour $n \in \mathbf{N}$, puis x/q pour $q \in \mathbf{N}^*$, grâce à la remarque précédente, et enfin $(p/q)x$, pour $p/q \in \mathbf{Q}^+$, défini comme $(px)/q$. On peut alors définir λx pour $\lambda \in \mathbf{R}^+$ comme la borne supérieure des $(p/q)x$ pour $p/q \in \mathbf{Q}$, $p/q < \lambda$. Si y est une autre grandeur, on montre qu'il existe un unique réel λ tel que l'on ait $y = \lambda x$, autrement dit, on peut parler du **rapport** $\lambda = y/x$ de deux grandeurs de même nature. Ce nombre est la borne supérieure des rationnels p/q qui vérifient $px < qy$. Cette remarque reproduit essentiellement la démarche d'Euclide, à la différence majeure près qu'il ne considérait pas vraiment les rationnels p/q comme des nombres et moins encore leur borne supérieure.

C. GRANDEURS ET MESURES

Comme on l'a dit, la notion de grandeur a un sens avant même qu'une notion de **mesure** ne soit introduite, mais, bien entendu, la nécessité d'un

14. Rappelons que cela signifie que s est le plus petit majorant de X.

procédé de mesure se fait jour très rapidement. Par exemple, pour les longueurs, elle s'impose lorsqu'on ne peut déplacer les objets à comparer. Pour poursuivre avec la situation des déménagements, on pourra penser à la comparaison des dimensions de deux pièces éloignées. Le principe est alors d'utiliser un étalon, une **unité**. Dans le cas de la longueur, les premières tentatives en ce sens ont sans doute utilisé les moyens du bord : le pied, l'empan d'une main, un bâton, une ficelle, etc. On compare alors la grandeur des objets considérés et celle d'une ou plusieurs unités additionnées. Autrement dit, on associe à un objet, vis-à-vis d'une grandeur donnée, un nombre : le nombre d'unités qu'il comporte. Bien entendu, si les premières mesures se sont limitées à des nombres entiers d'unités, il a rapidement fallu utiliser des fractions, voire des réels.

Lorsqu'on a choisi une unité, l'ensemble des grandeurs G n'est plus qu'un avatar de $\mathbf{R}^+$:

Théorème 5.3. *Soit* G *l'ensemble des grandeurs d'un type donné, au sens de 5.1 et soit* $u \in \mathrm{G}$ *une grandeur non nulle (l'unité). Il existe une application* $\mu : \mathrm{G} \to \mathbf{R}^+$*, unique, qui envoie* 0 *sur* 0 *et* u *sur* 1 *et qui respecte l'ordre et l'addition. Avec les axiomes de 5.1, cette application est bijective. C'est l'application* **mesure** [15] *de la grandeur considérée relativement à l'unité* u*. Si on remplace l'unité* u *par* u'*, les mesures* μ *et* μ' *sont proportionnelles.*

Autrement dit, et les physiciens ne renieraient pas cet adage, **il n'y a pas de grandeur sans mesure**.

Démonstration. On renvoie le lecteur qui souhaiterait plus de détails à [B] § 2, Prop. 1 et 2. Soit $x \in \mathrm{G}$. On a vu en 5.2.4 qu'il existe un unique réel λ tel que x s'écrive λu. On pose alors $\mu(x) = \mu(\lambda u) = \lambda$. Les vérifications sont faciles. Si on a une autre unité u' et si le rapport u'/u est le réel α on vérifie que l'on a $\mu = \alpha\mu'$.

Remarque 5.4. Si $g : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est une grandeur il y a donc des applications « mesure de la grandeur » g pour les objets de E, ce sont les applications $\mu \circ g$ associées au choix d'une unité u. Réciproquement, si on a une application $m : \mathrm{E} \to \mathbf{R}^+$ surjective quelconque, autrement dit un procédé pour associer un nombre à un objet, on lui associe une grandeur g de la façon suivante. On définit sur E la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ « avoir même grandeur » : x et $y \in \mathrm{E}$ ont même grandeur si l'on a $m(x) = m(y)$, autrement dit si le procédé m donne, pour x et y, le même résultat. L'ensemble des grandeurs G est alors l'ensemble quotient $\mathrm{E}/\mathscr{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation et l'application m induit une bijection de G sur $\mathbf{R}^+$.

Remarque 5.5. Le lecteur trouvera, à bon droit, que ce qui précède est abstrait, voire abscons. Pour résumer les résultats précédents dans un

15. Attention le mot mesure n'est pas pris en son sens mathématique usuel.

langage moins ésotérique, on peut dire que les deux notions de grandeur et mesure sont indissociables, mais que la différence essentielle entre elles c'est que, pour **une** grandeur donnée, il n'y a pas **une** mesure associée, mais plusieurs, toutes proportionnelles [16]. Choisir une mesure revient à choisir une grandeur unité u et à décréter qu'on a $\mu(u) = 1$. Une grandeur n'est pas un nombre, mais on peut la voir comme un nombre d'unités : on écrira $x = \lambda u$ (avec λ réel) si on a $\mu(x) = \lambda$.

Si on change d'unité, en prenant une nouvelle unité u', on a une nouvelle mesure μ'. Cette mesure étant proportionnelle à la précédente elle est donc déterminée par la valeur $\mu'(u) = k$ et on a, pour toute grandeur x, $\mu'(x) = k\mu(x)$. Le fait que les grandeurs a, b soient égales n'est pas altéré par le changement d'unité. En effet, si on a $\mu(a) = \mu(b) = l$, on a $\mu'(a) = \mu'(b) = kl$. Par exemple, si la masse d'une orange, mesurée en grammes, est de 153, cette même masse, mesurée en tonnes sera 0,000153 et on écrira $153\,\mathrm{g} = 0{,}000153\,\mathrm{t}$. De même, le fait qu'on ait $a < b$, ou encore le rapport a/b sont inchangés.

D. LE POINT DE VUE DES PHYSICIENS

Il n'est pas différent de ce qui précède, mais les physiciens insistent sur deux points : l'existence de procédés explicites de mesure et les lois physiques, et ils distinguent entre les grandeurs « de base » (longueur, masse, temps, intensité, température, etc.) et les grandeurs « composées » (masse volumique, vitesse, énergie, etc.) qui se déduisent des précédentes par des lois physiques et des formules.

On sait aussi que les physiciens utilisent de manière essentielle les équations aux dimensions pour vérifier la cohérence des deux membres d'une formule.

E. LES QUESTIONS ÉPISTÉMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES

La question fondamentale est celle de la nécessité de distinguer entre grandeur et nombre. La réponse à cette question n'est pas si évidente puisqu'au moment de la réforme des mathématiques modernes la notion de grandeur avait été complètement bannie de l'enseignement.

Critique de Platon, ou plaidoyer pour les nombres.

Les Grecs font soigneusement la distinction entre nombres et grandeurs, réservant essentiellement le nom de nombres aux entiers (positifs). Les

16. Note pour d'éventuels lecteurs mathématiciens. La différence entre l'ensemble des grandeurs et les réels est du même ordre que celle qui sépare un espace affine et un espace vectoriel ou encore un espace vectoriel de dimension finie et l'espace $\mathbf{R}^n$. Dans chacun des cas il y a un isomorphisme entre les objets, mais il n'est pas « canonique », il repose sur un choix, choix d'une unité, d'une origine, d'une base.

autres nombres (au sens moderne : rationnels, réels) apparaissent le plus souvent comme des rapports de grandeurs. C'est ainsi que Platon s'interdit de calculer dans les rationnels, revenant aux entiers par le produit en croix, voir remarque 5.2.4. Il revendique ce choix avec un brin de mépris en disant : *les calculateurs divisent, les savants multiplient.*

Un autre exemple de la prééminence des grandeurs : les Grecs ne considèrent des puissances que si la grandeur correspondante existe. C'est le cas du carré d'une longueur, qui est une aire, ou de son cube, qui est un volume. En revanche, la puissance quatrième d'une longueur ne correspond pas à une grandeur et n'a donc pas de sens pour les Grecs. Ce parti pris a sans doute bloqué chez eux le développement d'une algèbre consistante.

Il est clair que ces restrictions ont des inconvénients. Elles ont empêché les Grecs de résoudre leurs problèmes de constructions faute de pouvoir « passer aux nombres » comme le fera Descartes (voir ci-dessous chapitre 6). Un autre fait important est à signaler qui plaide pour un oubli (momentané) des grandeurs : des situations physiques différentes peuvent correspondre à des situations mathématiques identiques. C'est le cas par exemple des équations différentielles linéaires du second ordre $ay'' + by' + cy = 0$ (ou $= f(t)$) qui s'interprètent aussi bien en électricité avec pour y une charge, en mécanique avec pour y une longueur, etc.

Critique de Lebesgue, ou plaidoyer pour les grandeurs.

À l'opposé de l'importance des grandeurs chez les Grecs, la tentation de beaucoup de mathématiciens est de les occulter. Voilà ce que dit Henri Lebesgue (voir [L]) : *Ce sont les nombres qui, seuls, servent en mathématiques ; libre à chacun de surajouter à ces notions mathématiques des notions métaphysiques, mais celles-ci ne doivent pas intervenir dans l'enseignement.*

Forts de cette caution éminente, les programmes (des écoles, collèges et lycées) de 1970 ont évacué carrément les unités, disant sans vergogne qu'un même rectangle, pavé avec des carrés de côté a a pour aire 28 et que, pavé avec des carrés de côté $a/2$, il a pour aire 4×28, donc qu'il n'a pas même aire selon les unités ! En fait, il faut comprendre mesure et non pas aire : la grandeur (ici l'aire) a disparu.

La plupart des experts s'accordent aujourd'hui pour juger que cet ostracisme à l'égard des grandeurs était sans doute une erreur et les programmes actuels les ont remises à l'honneur. De fait, il y a plusieurs arguments en leur faveur :

• D'abord, les liens historiques très forts entre les notions de grandeur et de nombre font qu'il semble dommage de se priver de l'appui des grandeurs pour l'apprentissage des nombres. Cela vaut, en particulier, à l'école élémentaire.

• Ensuite, la notion de grandeur est essentielle pour les applications,

en physique et ailleurs. En ce domaine, les changements d'unités sont indispensables (penser à la différence d'échelle entre la taille d'un atome et la distance terre-soleil) et il est donc essentiel de faire la différence entre une grandeur et ses mesures. Sur ce thème on réfléchira à la difficulté qu'ont eue beaucoup de nos concitoyens [17] à comprendre que ce n'est pas parce que le nombre d'euros que l'on paie est plus petit que le nombre de francs que l'objet est moins cher : c'est la grandeur qui importe et non sa mesure.

• Enfin, il y a des arguments didactiques sérieux en faveur de l'utilisation des grandeurs. Un exemple très étudié est celui des aires (voir [DPG], [PG], [MB]). Les arguments en faveur de la grandeur aire servant d'intermédiaire entre les objets et les nombres sont de plusieurs types :

– Une identification trop précoce de l'aire et du nombre conduit à des confusions de grandeurs (notamment aire et périmètre).

– Considérer l'aire comme un nombre conduit les élèves à appliquer des formules, quitte à les inventer (exemple : l'aire du parallélogramme est le produit des longueurs de ses côtés).

– Le concept d'aire aide les élèves à établir des relations entre le cadre géométrique et le cadre numérique.

F. LA PRATIQUE DE CE LIVRE

La plupart du temps, nous utiliserons dans la suite de ce livre les grandeurs : longueurs (notation AB), angles (notation $\widehat{BAC}$), aires (notation $\mathscr{A}(X)$), volumes (notation $v(Y)$), plutôt que leurs mesures. Les quelques exceptions correspondront à des situations dans lesquelles une unité a été spécifiée. Dans ce cas nous utiliserons parfois, par abus de langage et pour éviter de répéter cent fois « la mesure de », la même notation pour la grandeur et sa mesure. Par exemple, il nous arrivera de parler d'un cercle de rayon 1, ou de dire que l'aire d'un carré du quadrillage est $n/100$, etc. Cela sera notamment le cas quand nous regarderons les aires (et surtout les volumes) comme des fonctions à valeurs réelles afin de calculer leurs dérivées. Mais c'est surtout avec les angles que nous commettrons le plus souvent cet abus de langage en disant que la somme des angles d'un triangle vaut π ou que l'angle du polygone régulier à n côtés est $2\pi/n$. Dans ce cas, la présence du nombre π est le signe infaillible que l'unité d'angle choisie est le radian.

Bibliographie

[Ars] Arsac G., *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, Aléas, 1998.

17. Et c'est pire encore en Italie, vu le cours de la lire !

[B] Bourbaki N., *Topologie, Chapitre V*, Hermann.

[CF] Cousin-Fauconnet A., *Enseigner la géométrie au collège*, A. Colin, 1995.

[DPG] Douady R. et Perrin-Glorian M.-J., *Aires de surfaces planes*, Petit x, numéros 6, p. 5-33 et numéro 8, p. 5-30, IREM de Grenoble, 1984-1985.

[E] Euclide, *Les éléments*, Traduction et présentation de Georges Kayas, Éd. du CNRS, 1978.

[Har] Hartshorne R., *Geometry : Euclid and beyond*, Springer, 2000.

[Hi] Hilbert D., *Les fondements de la géométrie*, Dunod, 1971.

[L] Lebesgue H., *La mesure des grandeurs*, Librairie A. Blanchard, Paris 1975.

[Li] Lion G., *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.

[MB] Moreira-Baltar P., *À propos de l'apprentissage du concept d'aire*, Petit x, numéro 43, p. 43-68, IREM de Grenoble, 1996.

[PG] Perrin-Glorian M.-J., *L'aire et la mesure*, Petit x, numéro 24, p. 5-36, IREM de Grenoble, 1990.