

Chapitre I

Quelques problèmes de technologie

Nous allons exposer cinq problèmes qui reviennent de fois diaboliques dans notre étude de la géométrie

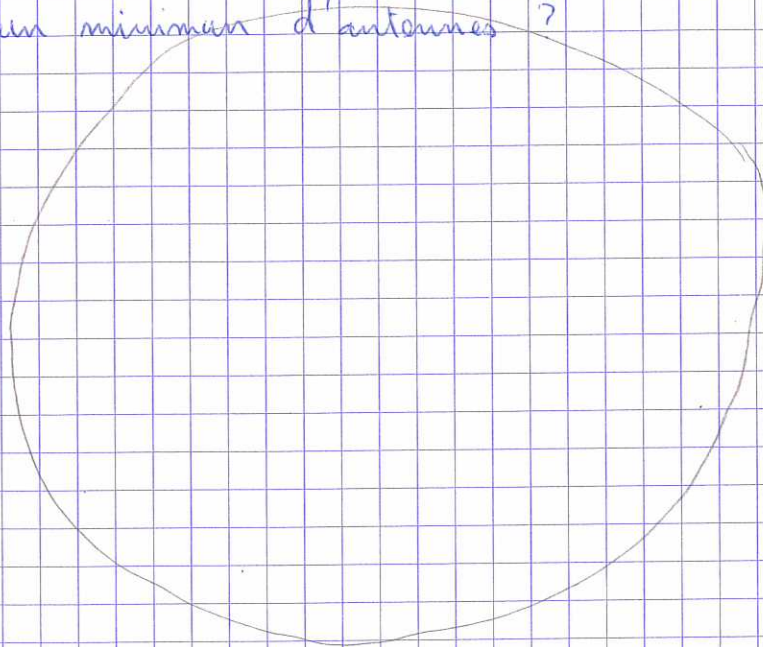
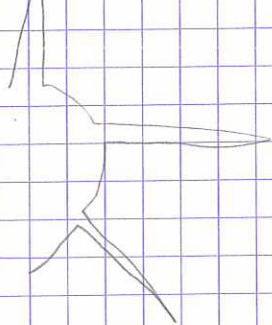
I) Disposition optimale des antennes

On cherche à disposer sur un grand espace qui a à peu près la forme d'un disque un réseau d'antennes dont le signal émis est de bonne qualité s'il est reçu à une distance inférieure à r .

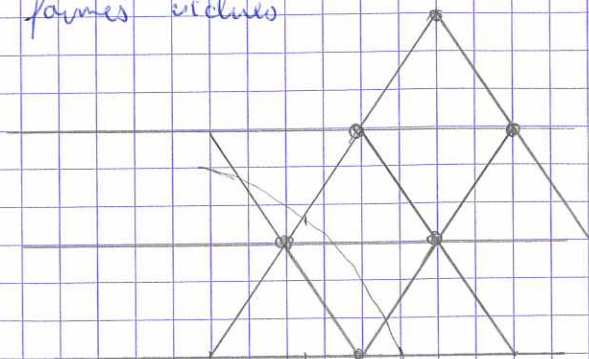
Vaut-il mieux choisir un réseau régulier formé

- de triangles équilatéraux
- de carrés
- d'hexagones réguliers

si on veut utiliser un minimum d'antennes ?



formes vides

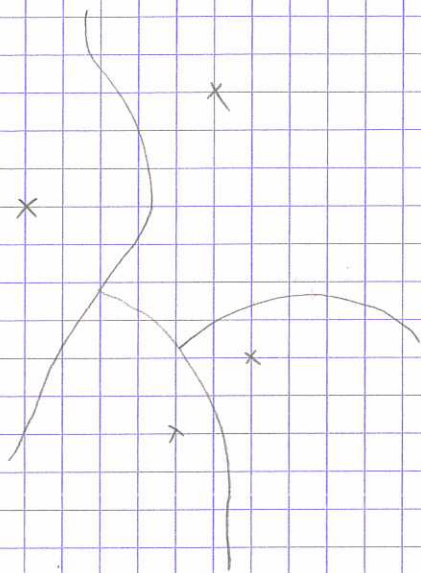


exemple d'espaces à couvrir

II) Les diagrammes de Voronoï

On suppose maintenant que des antennes sont déjà disposées sur le territoire et on cherche à définir une partition du territoire telle que

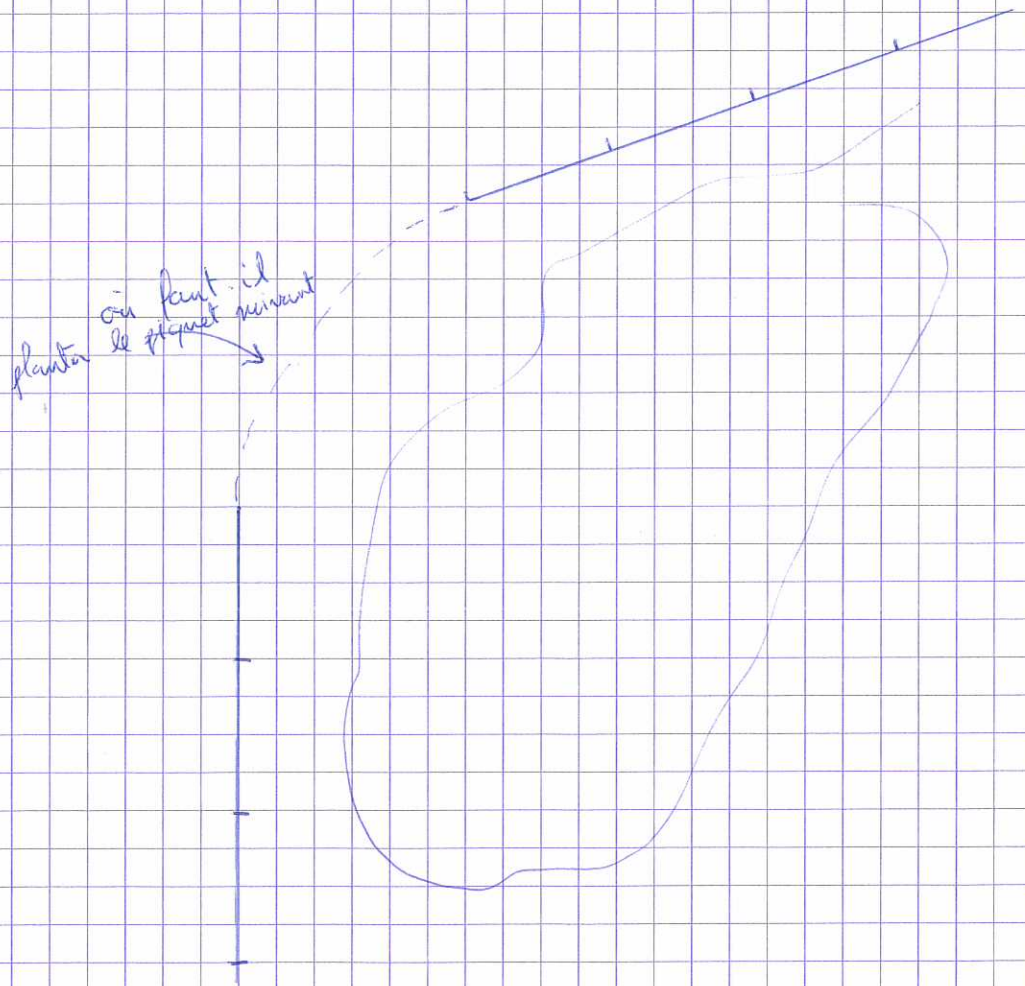
- chaque partie contienne exactement une antenne
- chaque point plus proche d'une antenne que des autres se trouve dans la partie de cette antenne.



Partition incorrecte.

III) Le piquetage d'une route

On veut marquer le tracé d'une nouvelle route dans une zone accidentée. On doit planter des piquets également répartis. On suppose que le piquetage est déjà fait sur deux parties rectilignes et on veut le faire sur l'arc de cercle qui les joint.



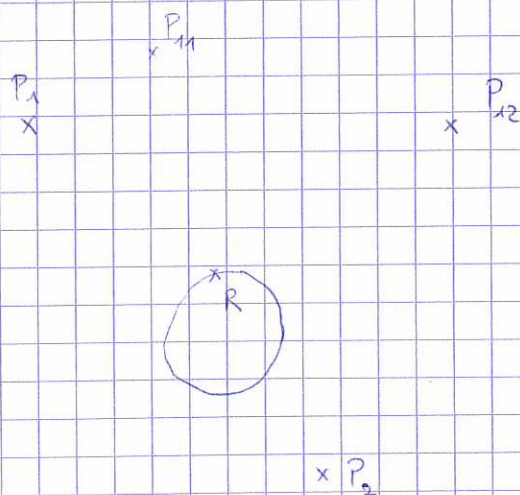
IV) La géométrie du GPS

Le GPS (Global Positioning System) permet à un récepteur de calculer sa position.

Des satellites S_i convenablement placés en orbites dont on connaît la position P_i (fixée dans un repère qui bouge avec la terre) émettent des signaux à des moments extrêmement précis t_i (grâce à des horloges atomiques).

Le récepteur reçoit certains de ces signaux à un instant t_r indiqué par son horloge beaucoup moins fiable.

On cherche à calculer la distance entre le récepteur et certains P_i et à en déduire la position du récepteur.



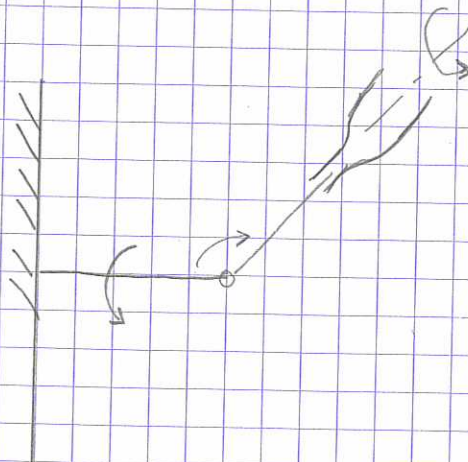
Combien de signaux faut-il capter au minimum ?

Comment déterminer la position du récepteur ?

II) La géométrie des robots

Un robot simple
est composé de bras
et d'une pince,
ici deux bras
et une pince.

Les trois mouvements indiqués
sont permis.



La pince de ce robot peut-elle être mise dans toutes les positions ?
Combien de bras et de mouvements faudrait-il ajouter
pour quelle le gripper ?

Chapitre II

Géométrie euclidienne statique

Nous ne ferons pas le travail de rédaction d'axiomes (propriétés admises postulées à propos des objets de base points droites et de leurs relations ^{incidence} ^{parallélisme}) et de définition des objets élémentaires (segment, demi-droites, angles, plans...)

I) Notations

Nous travaillerons toujours dans un espace ambiant E qui sera ^{parfois} ~~quelque fois~~ une droite euclidienne ^{orientée}, très souvent un plan euclidien ^{orienté} et quelque fois un espace euclidien (de dimension 3) ^{orienté}.

Si A et B sont deux points (distincts)

(A, B) est un couple ou bipoint

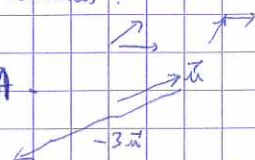
Deux bipoints (A, B) et (C, D) sont dits équivalents si $ABDC$ est un parallélogramme

On note $\vec{AB}$ est un vecteur l'ensemble des vecteurs constants à l'aide de bipoints de E .
 $[AB] = [BA]$ est un segment

le quadrilatère. Il est muni d'une addition et de la multiplication par les scalaires.

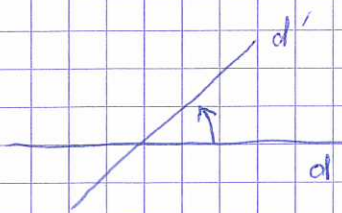
(AB) est une droite

$[AB)$ est une demi-droite fermée en A .



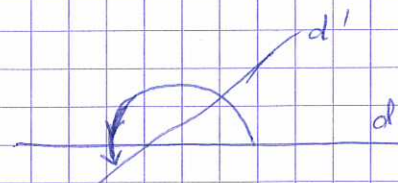
2) Si d et d' sont deux droites

$\widehat{(d, d')}$ est un angle orienté de droites



1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs

$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ est un angle ^{orienté} de vecteurs



3) Si A, B, C sont trois points

$\widehat{ABC}$ désigne un angle géométrique



On convient que le mot angle signifie angle orienté.

II) Mesure de longueur

Rappelons que si E et F sont deux ensembles, le produit cartésien de E par F est l'ensemble des couples dont le premier argument est un élément de E et le second un élément de F .

1) Produit scalaire

Le caractère euclidien de l'espace E est la donnée d'une application appelée produit scalaire

$$\varphi: \vec{E} \times \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

- φ est linéaire pour chaque argument

- φ est symétrique

- φ est positive

$$\varphi(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \text{ si } \vec{u} = \vec{0}$$

2) Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

droites perpendiculaires

On note en général $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ par $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou encore $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Deux droites sont dites orthogonales si l'un de leur vecteurs direct est orthogonal à l'autre.

3) Longueur

On définit alors à partir de l'application φ

- la norme d'un vecteur $\vec{u}$ par

$$\|\vec{u}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

- la longueur du segment $[AB]$ par

$$l([AB]) \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{AB}\|$$

Cette définition est cohérente car ~~on se demande~~ ~~si~~ ~~le même segment~~

$[AB]$ est le support du vecteur $\vec{BA}$ mais

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{BA}\| \quad (\text{démonstré})$$

on peut vérifier que $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BA}\|$ $\varphi(\vec{AB}, \vec{AB}) = \varphi(\vec{BA}, \vec{BA})$

$$\text{et donc } l([AB]) = l([BA])$$

On note aussi $l([AB])$ par AB .

voir en TP

Théorème (déjà vu) Inégalité triangulaire

Si A, B et C sont trois points d'un espace euclidien alors

$$AC \leq AB + BC$$

et $AC = AB + BC \iff B \in [AC]$.

3/ Médiatrice

Définition: Soit A et B deux points d'un espace E .

On appelle médiatrice du segment $[AB]$ l'ensemble des points M de E équidistant de A et de B .

Proposition: Soit A et B deux points d'un espace E . Soit I le milieu de $[AB]$.

La médiatrice du segment $[AB]$ est l'hyperplan de E

des points M tel que $\vec{IM} \perp \vec{AB}$.

passant par le milieu I de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB) .

Dém: Soit $M \in E$

$$M \in \text{Médiatrice } ([AB]) \iff AM = BM$$

$$\iff \vec{AM}^2 = \vec{BM}^2$$

$$\iff AI^2 + 2\vec{IM} \cdot \vec{AI} = BI^2 + 2\vec{IM} \cdot \vec{IB}$$

$$\iff \vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0$$

$\iff M$ appartient à l'hyperplan

Cor: Dans un plan euclidien, la médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points de la droite passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à $[AB]$.

Exercice: 1/ Montrer que dans un triangle non aplati (qui n'a pas d'angle nul ou plat) deux médiatrices ont toujours un point commun.

- 2) Montrer que les trois médianes d'un triangle non aplati sont concourantes.

III) Mesures d'angles

1) Mesures d'angles de vecteurs

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté de vecteurs.

- On suppose d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de norme 1

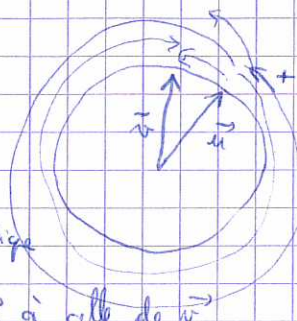
Alors par définition

une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$

est la longueur algébrique d'un arc

de cercle tracé sur le cercle trigonométrique

orienté et joignant l'extrémité de $\vec{u}$ à celle de $\vec{v}$



Toutes les mesures diffèrent d'un multiple de 2π

- Si on les mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ sont les mêmes

$$= 0 + 2k\pi \quad \text{si} \quad \vec{u} \text{ ou } \vec{v} = 0$$

$$= \text{mes}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) \quad \text{si on}$$

Par additivité des longueurs, on obtient la relation de Choles pour les mesures d'angle

$$\text{mes}(\vec{u}, \vec{u}) = - \text{mes}(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\text{mes}(-\vec{u}, -\vec{v}) = \text{mes}(\vec{u}, \vec{v})$$

Théorème:

$$\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{mes}(\vec{u}, \vec{w}) + \text{mes}(\vec{w}, \vec{v})$$

La mesure principale d'un angle géométrique appartient

à $] -\pi, \pi]$

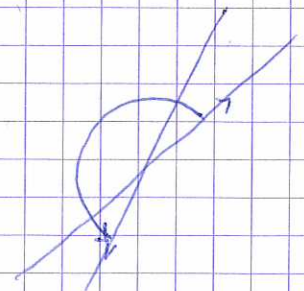
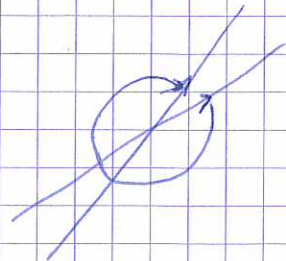
Théorème (Somme des angles)

$$\text{mes}(\vec{AB}, \vec{AC}) + \text{mes}(\vec{BC}, \vec{BA}) + \text{mes}(\vec{CA}, \vec{CB}) = \pi \text{ mod } 2\pi$$

$$\text{Donc} \quad \text{mes}(\vec{CA}, \vec{CB}) = \text{mes}(\vec{AC}, \vec{BC})$$

2/ Mesures d'angles de droites

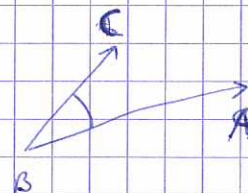
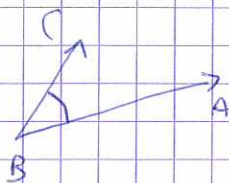
Si d et d' sont deux droites, les mesures de $(\widehat{d, d'})$ sont toutes les mesures d'angles orientés de vecteurs directeurs $(\vec{u}, \vec{u}')$ où $\vec{u}$ dirige d et $\vec{u}'$ dirige d' . Elles diffèrent d'un multiple de π .



Relation de Chasles

3/ Mesures d'angles géométriques

Si A, B, C sont trois points, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$ est la valeur absolue de la mesure principale de l'angle $(\vec{BA}, \vec{BC})$.

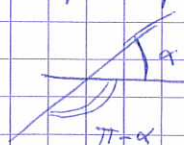


$$\text{mes}(\widehat{ABC}) = \text{mes}(\widehat{CBA})$$



Si mesure $(ABC) \in [0, \frac{\pi}{2}[$

angle aigu

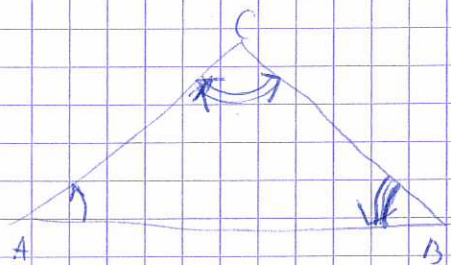


$[\frac{\pi}{2}, \pi]$

angle obtus

$\frac{\pi}{2}$
angle droit.

Théorie : Mesures d'angles géométriques



Donc : On suppose ABC ~~non~~ plat : facile

On suppose ABC non plat

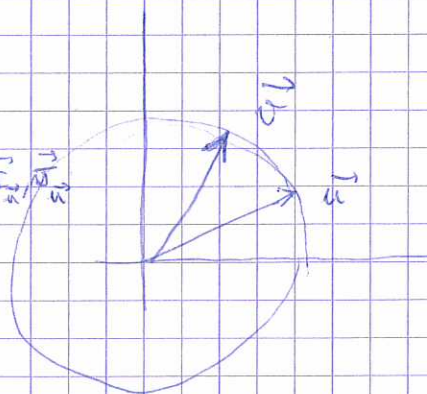
alors tous les couples $(\vec{AB}, \vec{AC})$ $(\vec{BC}, \vec{BA})$ et $(\vec{CA}, \vec{CB})$
 ont des mesures dans $]0, \pi[$

La somme de ces mesures est dans $]0, 3\pi[$ égale à π
 modulo 2π .

4) Trigonométrie.

Définition (Sinus cosinus)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires
 On appelle $\vec{u}$ en une base orthonormée directe $\vec{u} = \cos(\vec{u}, \vec{v})\vec{v} + \sin(\vec{u}, \vec{v})\vec{v}^\perp$
 $(\vec{u}, \vec{v})$ angle de vecteurs correspond



$$\begin{cases} \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \\ \sin(\vec{u}, \vec{v}) \end{cases}$$

sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\vec{e}, \vec{f}$

$$\vec{u} = \cos \vec{e} + \sin \vec{f}$$

Prop. : $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ ne dépendent
 Si $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ ont les mêmes mesures

Formule d'addition:

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} = \alpha$

$$\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \cos(\vec{u}, \vec{v}) \cos(\vec{v}, \vec{w}) - \sin(\vec{u}, \vec{v}) \sin(\vec{v}, \vec{w})$$

Dém: $\vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}) \vec{I}_u + \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{J}_u = \vec{I}_v$

$$\vec{J}_v = -\sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{I}_u + \cos(\vec{u}, \vec{v}) \vec{J}_u$$

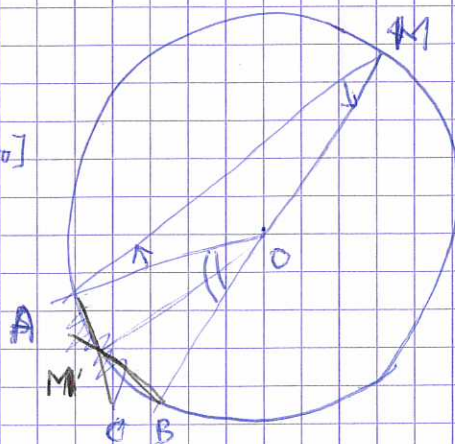
$$\vec{w} = \cos(\vec{v}, \vec{w}) \vec{I}_v + \sin(\vec{v}, \vec{w}) \vec{J}_v$$

$$= \cos(\vec{v}, \vec{w}) (\cos(\vec{u}, \vec{v}) \vec{I}_u + \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{J}_u)$$

$$+ \sin(\vec{v}, \vec{w}) (-\sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{I}_u + \cos(\vec{u}, \vec{v}) \vec{J}_u)$$

5/ Théorie des angles inscrits

$$\text{mes}(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = 2 \text{mes}(\widehat{MA, MB}) \quad [20]$$



Dém:

$$\text{mes}(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = -\text{mes}(\vec{OM}, \vec{OA}) + \text{mes}(\vec{OM}, \vec{OB}) \quad \text{Chasles}$$

$$= \text{mes}(\vec{AO}, \vec{AM}) + \text{mes}(\vec{MA}, \vec{MO}) \quad \text{car } (OA, M)$$

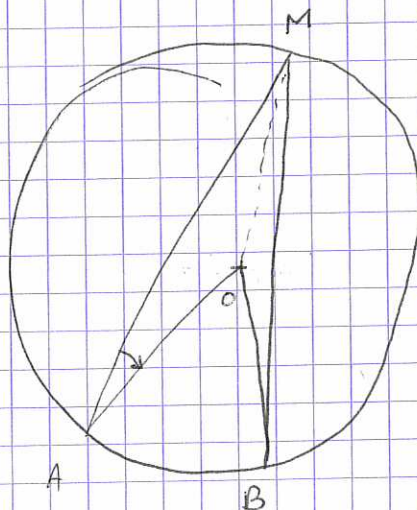
$$= 2 \text{mes}(\widehat{MA, MB}) \quad \text{car } (MA, MB) \text{ isocèle en } M$$

Cas général

$$\text{mes}(\vec{OA}, \vec{OB}) = \text{mes}(\vec{OA}, \vec{OM}) + \text{mes}(\vec{OM}, \vec{OB})$$

$$\begin{aligned} \text{OAM} &= \pi - \text{mes}(\vec{AM}, \vec{AO}) - \text{mes}(\vec{MO}, \vec{MA}) \\ \text{OMB} &+ \pi - \text{mes}(\vec{BM}, \vec{BO}) - \text{mes}(\vec{MO}, \vec{MB}) \\ &\quad \text{MB, MO} \quad \text{BO, BM} \end{aligned}$$

$$= 2\text{mes}(\vec{MA}, \vec{MO}) + 2\text{mes}(\vec{MO}, \vec{MB})$$



IV) Mesure de surface

1) On veut associer à une surface d'un plan euclidien une mesure appelée aire telle que
positive ou nulle

- 1) L'aire du carré unité est 1 $\text{ot}(\square) = 1$
- 2) L'aire est additive sur les parties disjointes
- 3) L'aire est invariante par rotation, translation, symétrie
- 4) L'aire est multipliée par λ^2 par une homothétie de rapport λ .

Proposition: L'aire d'un point et l'aire d'un segment sont nulles

Defn: $\text{aire}_{A_2}(A) = A$ $\text{aire}(\triangle ABC) = 4 \text{aire}(\triangle A_1B_1C_1)$

$$\begin{aligned} \text{aire}_{A_2}([AB]) &= [AB] \cup [BC] = \text{aire}_{A_2}([ABC]) = 2 \text{aire} \\ &\quad \uparrow \text{homothétie} \quad \uparrow \text{translation} \end{aligned}$$

Lemme du demi-parallélogramme

Une diagonale partage un parallélogramme en deux triangles de même aire.

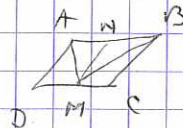
Dém: Par symétrie centrale

Lemme du parallélogramme

Prop: $ABCD$ parallélogramme $M \in [CD]$

Alors $A(AMB) = \frac{1}{2} A(ABCD)$

Dém: On trace la parallèle à (AD) passant par M .



Lemme de la médiane

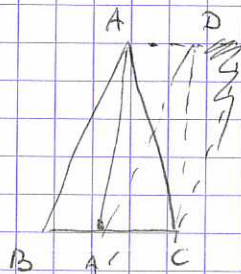
Une médiane coupe un triangle en deux triangles de même aire

$$A(ABA') = \frac{1}{2} A(ADA'B)$$

$$A(ACA') = \frac{1}{2} A(ADCA')$$

$$A(ADA'B) = 2A(ADA')$$

$$A(ADCA') = 2A(ADA')$$



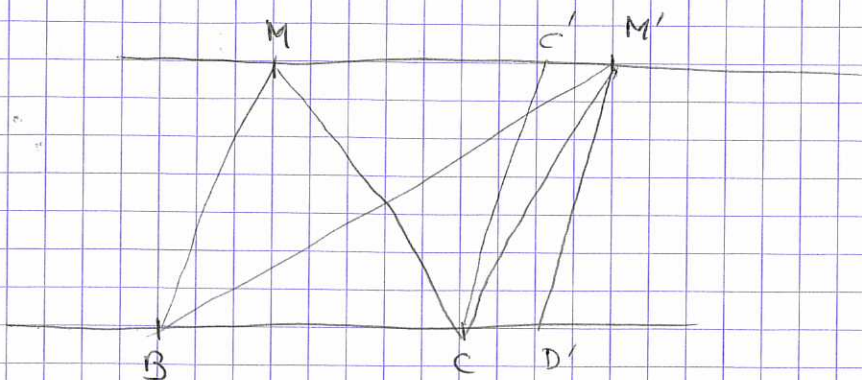
Lemme du trapèze (Dém en TD)

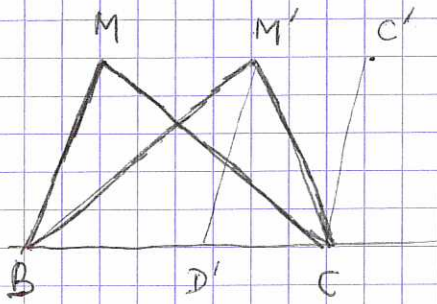
Sont MBC et $M'BC$ deux triangles de même base BC

M et M' parcourant une droite parallèle à (BC) .

Alors $A(MBC) = A(M'BC)$

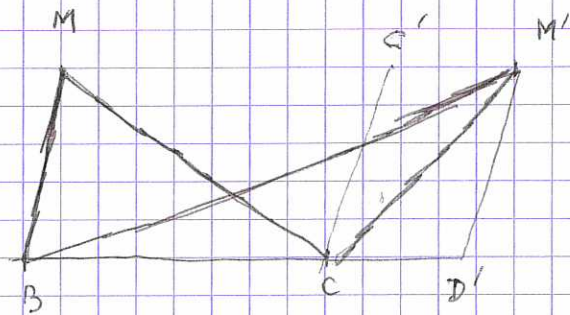
Dém:





$$A(BMC) = \frac{1}{2} A(BMC'C)$$

$= A(BM'C)$ par le lemme du parallélogramme



lemme du parallélogramme

$$A(BMM'C) = A(BMC) + \frac{1}{2} A(BMM'D')$$

lemme du demi-parallélogramme

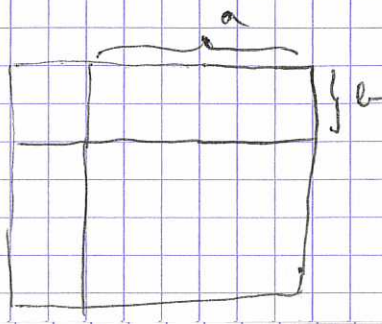
$$A(BMM'C) = A(BM'C) + \frac{1}{2}$$

2) Calculs d'aire

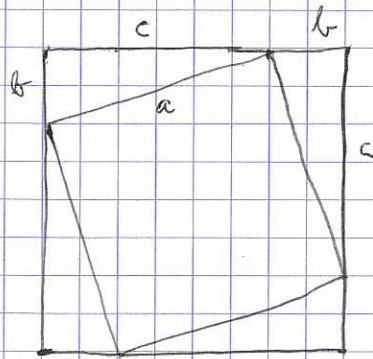
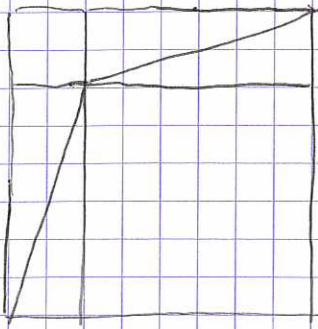
Aire du carré : par honnêteté

Aire du rectangle

$$(a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$$



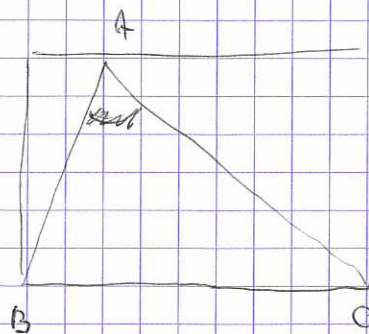
Théorème de Pythagore



Aire d'un triangle

par le lemme du parallélogramme

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \text{ Base Hauteur}$$



$$AH = AB \sin \hat{A}$$

$$A(ABC) = AB \cdot AC \sin \hat{A}$$

