UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

DEVOIR MAISON : (À RENDRE LE 9 MARS)

Vous pouvez traiter trois ou quatre exercices. Une importance sera accordée au soin et à la qualité de la rédaction. Un bonus sur la note de contrôle continu allant jusqu'à 2 points peut être accordé.

On rappelle que $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}/Im(z) = 0$ et $re(z) \leq 0\}$ et que $\log$ désignera la branche principale du logarithme définie sur $\mathbb{C}^-$ à valeurs dans $B := \{z \in \mathbb{C}/ -\pi < Im(z) < \pi\}$.

Exercice 1 (Séries entières)**.**

1. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série entière convergente (avec un rayon de convergence strictement positif). Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n!} z^n$.
2. Soit deux séries entières centrées en 0 de rayon de convergence $R > 0$ et de somme respective f et g. On suppose que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = g(x)$. Montrer que pour tout $z \in \Delta_r$, $f(z) = g(z)$.
3. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sin(a+z) = \sin(a)\cos(z) + \cos(a)\sin(z)$.

Exercice 2 (Équations)**.**

1. Soit $c \in \mathbb{C}$. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$, alors $\sin z = c \iff (e^{iz})^2 - 2ice^{iz} - 1 = 0$.
2. Soit $c \in [-1, 1]$. Montrer que toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de $\sin z = c$ sont réelles.
3. Soit a et b deux nombres complexes. Calculer $e^{i(a+b)}$ et $e^{-i(a+b)}$ en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$ et $\cos b$.
4. Soit a et b deux nombres complexes. Démontrer la formule pour $\sin(a+b)$ en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$ et $\cos b$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\cos z + \sin z = 2$.

Exercice 3 (Biholomorphisme de $\mathbb{H}$)**.**

On rappelle qu'à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{R})$, on associe l'application linéaire fractionnaire

$$h_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

1. Montrer que h_A envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$.
2. Montrer que pour tout élément z de $\mathbb{H}$, il existe $A \in SL(2,\mathbb{R})$ tel que $h_A(i) = z$.

Exercice 4 (Logarithmes)**.**

1. Déterminer et représenter l'ensemble $D := \{z \in \mathbb{C}, z^3 \in \mathbb{C}^-\}$.
2. Soit $f : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \log(z^3)$. En quels points de $\mathbb{C} - D$ peut-on prolonger f par continuité ?
3. Comparer les fonctions f et $3\log$ sur l'intersection $D \cap \mathbb{C}^-$ de leur domaine de définition.