UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

Corrigé (à rendre le 9 mars)

Vous pouvez traiter trois ou quatre exercices. Une importance sera accordée au soin et à la qualité de la rédaction. Un bonus sur la note de contrôle continu allant jusqu'à 2 points peut être accordé.

On rappelle que $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}/Im(z) = 0 \text{ et } re(z) \leq 0\}$ et que $\log$ désignera la branche principale du logarithme définie sur $\mathbb{C}^-$ à valeurs dans $B := \{z \in \mathbb{C}/ -\pi < Im(z) < \pi\}$.

Exercice 1 (Séries entières)**.**

1. *Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série entière convergente (avec un rayon de convergence strictement positif). Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n!} z^n$.*

   On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ et $r \in]0, R[$. On sait alors que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée en module. Soit $z \in \mathbb{C}$

   $$\left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| \leq |a_n r^n| \frac{\left|\frac{z}{r}\right|^n}{n!}$$

   est le terme général d'une suite bornée en module car $\frac{\left|\frac{z}{r}\right|^n}{n!}$ est borné. Par conséquent, $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

2. *Soit deux séries entières centrées en 0 de rayon de convergence $R > 0$ et de somme respective f et g. On suppose que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = g(x)$. Montrer que pour tout $z \in \Delta_r$, $f(z) = g(z)$.*

   L'application $f - g$ est somme sur Δ_r connexe d'une série entière centrée en 0 et s'annule sur l'ensemble non discret $]-R, R[$. Par le principe des zéros isolés, $f = g$ sur Δ_r.

3. *En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sin(a + z) = \sin(a)\cos(z) + \cos(a)\sin(z)$.*

   Soit $a \in \mathbb{R}$. Les deux applications $z \mapsto \sin(a+z)$ et $z \mapsto \sin(a)\cos(z)+\cos(a)\sin(z)$ sont développables en séries entières sur $\mathbb{C}$ et coïncident sur $\mathbb{R}$ par la formule d'addition des sinus sur $\mathbb{R}$. Par la question précédente, elles coïncident sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2 (Équations)**.**

1. *Soit $c \in \mathbb{C}$. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$, alors $\sin z = c \iff (e^{iz})^2 - 2ice^{iz} - 1 = 0$.*

   Soit $z \in \mathbb{C}$.

   $$\begin{aligned} \sin z = c &\iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = c \iff e^{iz} - 2ic - e^{-iz} = 0 \\ &\iff (e^{iz})^2 - 2ice^{iz} - 1 = 0 \text{ car } e^{iz} \neq 0. \end{aligned}$$

2. *Soit* $c \in [-1, 1]$. *Montrer que toutes les solutions dans* $\mathbb{C}$ *de* $\sin z = c$ *sont réelles.*

   Soit $c \in [-1, 1]$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de $\sin z = c$. Alors e^{iz} est solution de $X^2 - 2icX - 1 = 0$. Comme $c \in [-1, 1]$, les solutions de cette équation sont $ic + \sqrt{1-c^2}$ et $ic - \sqrt{1-c^2}$, toutes les deux de module 1,

$$|e^{iz}| = e^{-y} = 1$$

   et donc $y = 0$, et z est donc réel.

3. *Soit* a *et* b *deux nombres complexes. Calculer* $e^{i(a+b)}$ *et* $e^{-i(a+b)}$ *en fonction de* $\sin a$*,* $\sin b$*,* $\cos a$ *et* $\cos b$*.*

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) \\ &= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-i(a+b)} &= e^{-ia}e^{-ib} = (\cos a - i\sin a)(\cos b - i\sin b) \\ &= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) - i(\sin a\cos b + \cos a\sin b). \end{aligned}$$

4. *Soit* a *et* b *deux nombres complexes. Démontrer la formule pour* $\sin(a+b)$ *en fonction de* $\sin a$*,* $\sin b$*,* $\cos a$ *et* $\cos b$*.*

$$\sin(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

   d'après la question précédente.

5. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$*, l'équation* $\cos z + \sin z = 2$*.*

   Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \cos z + \sin z = 2 &\iff \frac{1}{\sqrt{2}}\cos z + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin z = \sqrt{2} \\ &\iff \sin(\frac{\pi}{4} + z) = \sqrt{2} \\ &\iff (e^{iz}) \text{ est solution de } X^2 - 2i\sqrt{2}X - 1 = 0 \\ &\iff e^{iz} = i\sqrt{2} + i \text{ ou } e^{iz} = i\sqrt{2} - i \\ &\iff e^{iz} = (\sqrt{2}+1)e^{\frac{\pi}{2}} \text{ ou } e^{iz} = (\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, iz = \log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}+1) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &\qquad \text{ou } iz = \log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}-1) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = (\frac{pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}+1) \\ &\qquad \text{ou } z = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

   Les soultions de l'équation $\cos z + \sin z = 2$ dans $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes de la forme $(\frac{pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}+1)$ ou $z = (\frac{pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}-1)$ avec k entier.

Exercice 3 (Biholomorphisme de $\mathbb{H}$**)**.

On rappelle qu'à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *de* $SL(2,\mathbb{R})$*, on associe l'application linéaire fractionnaire*

$$h_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

1. *Montrer que* h_A *envoie* $\mathbb{H}$ *sur* $\mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \overline{\frac{az+b}{cz+d}}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right) = \frac{1}{2i}\frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{Im(z)}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

Par conséquent, si $Im(z) > 0$, alors $Im\left(h_A(z)\right) > 0$ et h_A envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$.

2. *Montrer que pour tout élément* z *de* $\mathbb{H}$*, il existe* $A \in SL(2,\mathbb{R})$ *tel que* $h_A(i) = z$.

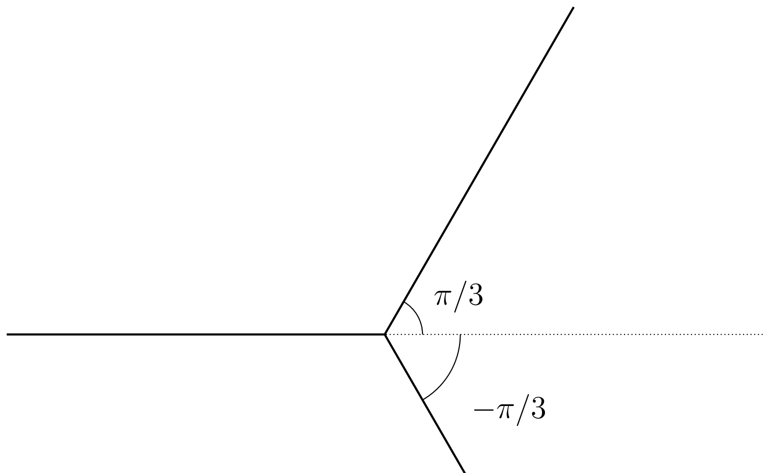
Soit $z = x + iy$. On a $\frac{xi-y}{1\times i+0} = z$. La matrice $\begin{pmatrix} x & -y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient ainsi donc que la matrice $\frac{1}{y}\begin{pmatrix} x & -y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de déterminant 1.

Exercice 4 (Logarithmes)**.**

1. *Déterminer et représenter l'ensemble* $D := \{z \in \mathbb{C}, z^3 \in \mathbb{C}^-\}$.

Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$.

$$\begin{aligned} z^3 \notin \mathbb{C}^- &\iff z^3 \in \mathbb{R}^- \iff r^3e^{i3\theta} \in \mathbb{R}^- \iff 3\theta \simeq \pi \mod 2\pi \\ &\iff \theta \simeq \frac{\pi}{3} \mod \frac{2\pi}{3} \iff \theta = \frac{-\pi}{3} \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \theta = \pi. \end{aligned}$$



Le domaine D est composé de $\mathbb{C}$ moins les demi-droites noires.

2. *Soit* $f : D \to \mathbb{C}$*,* $z \mapsto \log(z^3)$*. En quels points de* $\mathbb{C} - D$ *peut-on prolonger* f *par continuité ?*

   Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

   — Si $\theta \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$, $3\theta \in]-\pi, \pi[$ et donc, $f(z) = \log(z^3) = \log_{\mathbb{R}}(r^3) + i3\theta = 3\log_{\mathbb{R}}(r) + 3i\theta = 3\log(z)$.

   — Si $\theta \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$, $3\theta \in]\pi, 3\pi[$ et $3\theta - 2\pi \in]-\pi, \pi[$ et donc, $f(z) = \log(z^3) = \log_{\mathbb{R}}(r^3) + i(3\theta - 2\pi) = 3\log_{\mathbb{R}}(r) + 3i\theta - 2i\pi = 3\log(z) - 2i\pi$.

   — Si $\theta \in]-\pi, -\frac{\pi}{3}, [$, $3\theta \in]-3\pi, -\pi[$ et $3\theta + 2\pi \in]-\pi, \pi[$ et donc, $f(z) = \log(z^3) = \log_{\mathbb{R}}(r^3) + i(3\theta + 2\pi) = 3\log_{\mathbb{R}}(r) + 3i\theta + 2i\pi = 3\log(z) + 2i\pi$.

   La fonction f n'est donc pas continu aux points de la demi-droite d'angle $\frac{\pi}{3}$ ni aux points de la demi-droite d'angle $-\frac{\pi}{3}$ où la fonction ιog est continue. On sait que le saut de la branche principale $\log$ du logarithme entre $(-\pi^+$ et π^- est de $2i\pi$. Le saut de f est donc de $6i\pi$. Elle n'est donc pas continue aux points de la demi-droite d'angle π.

3. *Comparer les fonctions* f *et* $3\log$ *sur l'intersection* $D \cap \mathbb{C}^-$ *de leur domaine de définition.*

   La réponse a été donnée dans la question précédente.