Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

15 février 2017

Holomorphe, devoir maison

La clarté de la rédaction et la propreté de la présentation seront prises en compte.

Exercice 1 (Cauchy-Riemann)
Soient Ω un ouvert connexe du plan complexe, et f une fonction holomorphe définie sur Ω. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f'(z) = 0$;
2. $Im(f)$ est une constante ;
3. $Re(f)$ est une constante ;
4. $|f|$ est une constante ;
5. $\overline{f}$ est holomorphe sur Ω.

En déduire que l'application module d'un nombre complexe n'est pas holomorphe.

Exercice 2 (Biholomorphisme de $\mathbb{H}$)
On rappelle qu'à toute matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de $SL(2, \mathbb{R})$ on associe l'homographie suivante :

$$h_A : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \quad / \quad z \longrightarrow h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ ;$$

1) Montrer que h_A envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$.
2) Montrer que pour tout élément z de $\mathbb{H}$, il existe une matrice A de $SL(2, \mathbb{R})$ tel que $h_A(i) = z$.

Exercice 3 (Logarithme)
On considère la branche principale du logarithme notée *Log*. Soient deux nombres complexes z_1 et z_2, a-t-on $Log(z_1 \cdot z_2) = Log(z_1) + Log(z_2)$? Dans l'affirmative le démontrer, sinon donner un contre exemple.
On définie la fonction h comme suit :

$$h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad / \quad z \longrightarrow h(z) = Log(z^3) \ ;$$

1) Déterminer le domaine de définition de cette fonction.
2) Donner la valeur de $Log(-i)$.
3) Qu'en pensez vous ?