UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

EXAMEN DU 10 MAI 2017
(2 HEURES)

Nous recommandons de bien rédiger vos réponses, même partielles, plutôt que de traiter beaucoup de questions. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. Cependant, si vous ne parvenez pas à donner une démonstration complète, donnez une stratégie de démonstration, en indiquant les théorèmes utilisés et en précisant qu'il manque des détails. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement.

Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie... Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Un corrigé sera disponible sur la page du cours.

On rappelle que

- pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, +\infty[$, le disque ouvert de centre a et de rayon r est $\Delta_r(a) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$,
- le disque unité ouvert est $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, son bord est $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
- et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré.

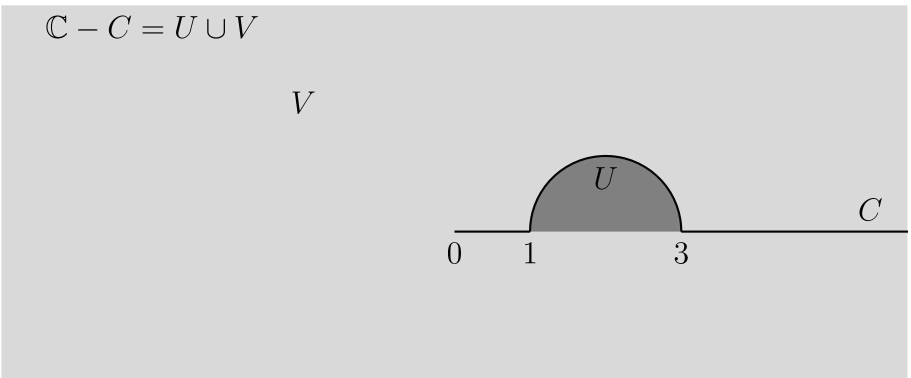
On rappelle le théorème de Liouville : *Toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bornée est constante.*

Exercice 1 (Logarithmes, 3 points)**.**

1. Rappeler la définition de la branche principale du logarithme.
2. Peut on définir un logarithme sur l'ensemble $\mathbb{C} - C$, qui est le plan complexe privé de l'ensemble

$$C := [\,0, 1\,] \cup \{\, z \in \mathbb{C} \;/\; \mid z - 2 \mid = 1 \text{ et } Im(z) \geq 0 \,\} \cup [\,3, \infty\,[?$$

On appellera $U := \{z \in \mathbb{C}, \mid z - 2 \mid < 1, Im(z) \geq 0\}$ la partie grisée,
et $V := \{z \in \mathbb{C}, z \notin C, z \notin U\}$ le reste de $\mathbb{C} - C$.



On précisera sur U et sur V l'argument choisi dans la définition du logarithme.

Tourner s.v.p.

Exercice 2 (Application entière dans $\mathbb{H}$, 6 points)**.**

1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe non constante. Montrer que l'image du plan complexe par f rencontre tous les disques ouverts non vides $\Delta_r(a)$ de $\mathbb{C}$.
2. En déduire que toute application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}$ est constante.
3. On considère
$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i}. \end{array}$$
Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\}, \quad 1 - |h(z)|^2 = \frac{4Im(z)}{|z+i|^2}.$$
4. En déduire que l'image du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ par h est une partie bornée de $\mathbb{C}$.
5. En déduire par une nouvelle démonstration que toute application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}$ est constante.

Exercice 3 (Primitive et résidus, 5 points)**.**

1. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, c un point de D et $f : D - \{c\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Rappeler la définition du résidu de f en c.
2. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D - \{c\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que f admet une primitive sur $D - \{c\}$. Que peut-on dire du résidu de f en c ?
3. Soit c un point de Δ et $f : \Delta - \{c\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe qui admet un pôle d'ordre 3 en c. Sous quelle condition f admet-elle une primitive sur $\Delta - \{c\}$?

Exercice 4 (Résidus et représentation, 5 points)**.**

1. Énoncer le théorème des résidus.
2. À l'aide du théorème des résidus, retrouver la formule de représentation de Cauchy pour les disques : Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Alors, pour tout disque $\Delta_r(a)$ dont l'adhérence est incluse dans D,
$$\forall b \in \Delta_r(a), \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta_r(a)} \frac{f(z)dz}{z-b} = f(b).$$
3. Montrer plus généralement : Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Alors, pour tout disque $\Delta_r(a)$ dont l'adhérence est incluse dans D,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall b \in \Delta_r(a), \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta_r(a)} \frac{f(z)dz}{(z-b)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}.$$

Exercice 5 (Racine de polynômes, 3 points)**.**

1. Énoncer le théorème de Rouché.
2. Montrer que les zéros du polynôme $p(z) = z^4 - 7z - 1$ sont tous inclus dans le disque ouvert $\Delta_2(0)$ centré en l'origine de rayon 2. On vérifiera soigneusement toutes les hypothèses du théorème utilisé.