UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 10 MAI 2017
(2 HEURES)

On rappelle le théorème de Liouville : Toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bornée est constante.

Exercice 1 (Logarithmes, 3 points)**.**

1. *Rappeler la définition de la branche principale du logarithme.*

   On définit une détermination du logarithme en posant

$$\begin{array}{llll} l_+ : & \mathbb{C}-]-\infty,0] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z = re^{i\theta}(r>0, -\pi<\theta<\pi) & \longmapsto & \log_{\mathbb{R}}(r)+i\theta. \end{array}$$

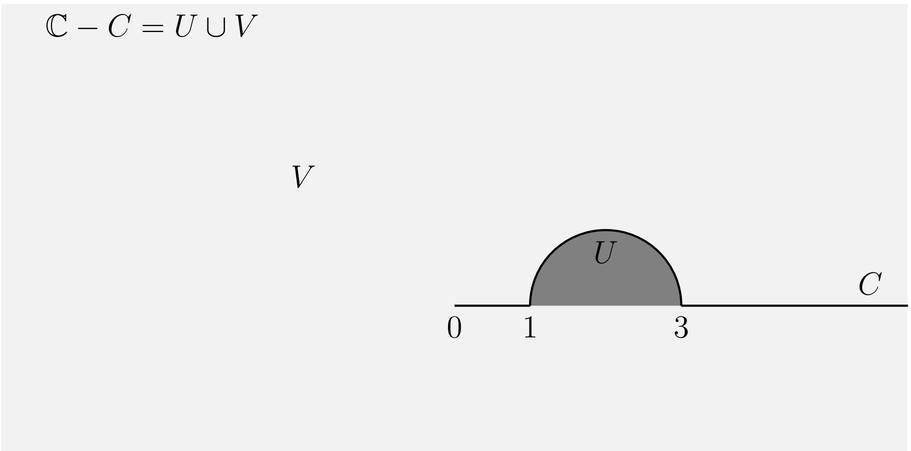
   C'est une application continue, et même holomorphe telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}-]-\infty,0], \quad e^{l_+(z)} = z.$$

2. *Peut on définir un logarithme sur $\mathbb{C}-C$ le plan complexe privé de l'ensemble*

$$C := [\,0,1\,] \cup \{\, z \in \mathbb{C} \,/\, \mid z-2 \mid = 1 \text{ et } Im(z) \geq 0 \,\} \cup [\,3,\infty\,[?$$

   On appelle $U := \{z \in \mathbb{C}, \mid z-2 \mid < 1, Im(z) \geq 0\}$ la partie grisée, et $V := \{z \in \mathbb{C}, z \notin C, z \notin U\}$ le reste de $\mathbb{C}-C$.



   On précisera sur U et sur V l'argument choisi dans la définition du logarithme.

   On définit une détermination du logarithme en posant

$$\begin{array}{llll} \ell : & \mathbb{C}-L & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z = re^{i\theta}(r>0, 0\leq\theta<2\pi) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} \text{sur } U, \\ \quad \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r)+i(\theta+2\pi). \\ \text{sur } V, \\ \quad \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r)+i\theta \end{array}\right. \end{array}$$

   On vérifie que ℓ est continue : en particulier sur le disque ouvert de centre $(2,0)$ et de rayon 1, ℓ coïncide avec la fonction $\log + 2i\pi$, qui est continue. On vérifie aussi que pour tout $z \in \mathbb{C}-L$, $e^{\ell(z)} = z$: c'est donc une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}-L$.

Exercice 2 (Application entière dans $\mathbb{H}$, 6 points)**.**

1. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe non constante. Montrer que l'image du plan complexe par f rencontre tous les disques ouverts non vides $\Delta_r(a)$ de $\mathbb{C}$.*

   Soit $\Delta_r(a)$ le disque de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$. Supposons que $Im(f)$ ne rencontre pas $\Delta_r(a)$. Alors,
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z) - a| \geq r.$$
   L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$ est alors bien définie, holomorphe sur $\mathbb{C}$ et majorée en module par $\frac{1}{r}$. Par le théorème de Liouville, elle est donc constante. Puisque $w \mapsto \frac{1}{w-a}$ est injective sur $\mathbb{C} - \{a\}$, en déduit que f est constante.

2. *En déduire que toute application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}$ est constante.*

   Une telle application entière ne rencontre par le disque $\Delta_1(-2i)$: elle est donc constante, d'après la question précédente.

3. *On considère*
   $$\begin{array}{cccc} h: & \mathbb{C} - \{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i}. \end{array}$$
   Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\}, \quad 1 - |h(z)|^2 = \frac{4Im(z)}{|z+i|^2}$.

   Soit $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$,
   $$\begin{aligned} 1 - |h(z)|^2 &= 1 - \frac{z-i}{z+i}\frac{\overline{z+i}}{\overline{z+i}} = 1 - \frac{|z|^2 + i(z-\overline{z}) + 1}{|z+i|^2} \\ &= 1 - \frac{|z|^2 - i(z-\overline{z}) + 1 + 2i(z-\overline{z})}{|z+i|^2} = \frac{4Im(z)}{|z+i|^2}. \end{aligned}$$

4. *En déduire que l'image du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ par h est une partie bornée de $\mathbb{C}$.*

   Sur $\mathbb{H}$, $Im(z) > 0$ et donc $|h(z)| < 1$. L'image du demi-plan $\mathbb{H}$ par l'application h est donc incluse dans le disque unité Δ ; c'est donc une partie bornée de $\mathbb{C}$.

5. *En déduire par une nouvelle démonstration que toute application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}$ est constante.*

   Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ une application holomorphe. Par composition, $h \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une application holomorphe dont l'image est bornée. Par le théorème de Liouville, elle est donc constante. Comme h est injective, on en déduit que f est constante.

Exercice 3 (Primitive et résidus, 5 points)**.**

1. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, c un point de D et $f : D - \{c\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Rappeler la définition du résidu de f en c.*

   Soit $r > 0$ tel que $\overline{\Delta_r(c)}$ est un disque fermé inclus dans D. Le résidu de f en c est
   $$Res_c(f) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Delta_r(c)} f(z)dz.$$
   Cette intégrale ne dépend pas de r tel que $\overline{\Delta_r(c)}$ est inclus dans D.

2. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D - \{c\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que f admet une primitive sur $D - \{c\}$. Que peut-on dire du résidu de f en c ?*

   Si f admet une primitive sur $D - \{c\}$, l'intégrale de f sur tout chemin fermé de $D - \{c\}$ est nulle. En particulier, le résidu de f en c est nul.

3. *Soit c un point de Δ et $f : \Delta - \{c\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe qui admet un pôle d'ordre 3 en c. Sous quelle condition f admet-elle une primitive sur $\Delta - \{c\}$?*

   D'après la question précédente, il est nécessaire que le résidu de f en c soit nul. Réciproquement, si le résidu de f en c est nul, montrons que f admet une primitive sur Δ. Par le développement au voisinage de c, on sait qu'il existe $a_{-3}, a_{-2}, a_{-1} \in \mathbb{C}$ et une fonction $\tilde{f}$ holomorphe sur Δ tels que

$$\forall z \in \Delta, \quad f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-c)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \frac{a_{-1}}{z-c} + \tilde{f}(z).$$

   Comme le résidu de f en c est nul, $a_{-1} = 0$. L'application $z \mapsto \frac{a_{-3}}{(z-c)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2}$ admet $z \mapsto -\frac{a_{-3}}{2(z-c)^2} - \frac{a_{-2}}{z-c}$ comme primitive sur $\Delta - \{c\}$. Puisque Δ est étoilé et que $\tilde{f}$ est holomorphe sur Δ, elle admet une primitive sur Δ donc sur $\Delta - \{c\}$. En conclusion, si le résidu de f en c est nul, f admet-elle une primitive sur $\Delta - \{c\}$.

Exercice 4 (Résidus et représentation, 5 points)**.**

1. *Énoncer le théorème des résidus.*

   Soit D un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. Soit Γ un chemin fermé dans D. Soit C un ensemble fini de points de $D - \Gamma$. Soit $f : D - C \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors,

$$\sum_{c \in C \cap Int(\Gamma)} Ind_\Gamma(c) Res_c(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z)dz.$$

2. *À l'aide du théorème des résidus, retrouver la formule de représentation de Cauchy pour les disques : Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Alors, pour tout disque $\Delta_r(a)$ dont l'adhérence est incluse dans D,*

$$\forall b \in \Delta_r(a), \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta_r(a)} \frac{f(z)dz}{z-b} = f(b).$$

   Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Soit $\Delta_r(a)$ un disque dont l'adhérence est incluse dans D. Soit $b \in \Delta_r(a)$. Soit $R > 0$ tel que $\overline{\Delta_r(a)} \subset \Delta_R(a) \subset D$. L'ouvert $\Delta_R(a)$ est étoilé, le chemin $\partial\Delta_r(a)$ est inclus dans $\Delta_R(a)$ et ne contient pas b; l'application $f : \Delta_R(a) - \{b\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z)}{z-b}$ est holomorphe : par le théorème des résidus, on en déduit

$$Ind_{\partial\Delta_r(c)}(b) Res_b(\frac{f(z)}{z-b}) = Res_b(\frac{f(z)}{z-b}) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-b} dz.$$

   Reste à noter que, en développant f en série entière au voisinage de b, $Res_b(\frac{f(z)}{z-b}) = f(b)$.

3. *Montrer plus généralement : Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Alors, pour tout disque $\Delta_r(a)$ dont l'adhérence est incluse dans D,*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall b \in \Delta_r(a), \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta_r(a)} \frac{f(z)dz}{(z-b)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}.$$

   On réitère le raisonnement précédent avec l'application $f_k : \Delta_R(a) - \{b\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}$. Le résidu de $\frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}$ en b est le coefficient de $(z-b)^k$ dans le développement en série entière de f centré en b. Comme ce développement est donné par le développement de Taylor, le coefficient de $(z-b)^k$ est $\frac{f^{(k)}(b)}{k!}$.

Exercice 5 (Racine de polynômes, 3 points)**.**

1. *Énoncer le théorème de Rouché.*

   Soit f et g deux applications holomorphes sur un ouvert étoilé D de $\mathbb{C}$. Soit Γ un chemin fermé simple dans D. On suppose que

   $$\forall z \in \Gamma, \;\; |f(z) - g(z)| < |g(z)|.$$

   Alors f et g ont le même nombre de zéros compté avec multiplicité dans l'intérieur de Γ.

2. *Montrer que les zéros du polynôme $p(z) = z^4 - 7z - 1$ sont tous inclus dans le disque $\Delta_2(0)$ centré en l'origine de rayon 2. On vérifiera soigneusement toutes les hypothèses du théorème utilisé.*

   L'ouvert $\mathbb{C}$ est étoilé et contient le chemin $\partial\Delta_2$ dont l'intérieur est Δ_2. Les deux applications $z \mapsto z^4$ et p sont polynômiales donc holomorphes sur $\mathbb{C}$. Soit $z \in \partial\Delta_2$. Alors

   $$|p(z) - z^4| = |7z + 1| \leq 7|z| + 1 \leq 7 \times 2 + 1 = 15 < 2^4 = |z^4|.$$

   Par le théorème de Rouché, le polynôme p et $z \mapsto z^4$ ont le même nombre de zéros compté avec multiplicités dans Δ_2, c'est à dire 4. Comme p est non nul de degré 4, tous ses zéros sont dans Δ_2.