UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

DEVOIR MAISON N°1

On traitera deux des exercices ci-dessous, au choix. Les niveaux de difficulté sont indiqués par des astérisques (* = facile , ** = moyen, *** = difficile).

1. SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 1 (Rayon de convergence *)**.**

Donner les rayons de convergence des séries entières suivantes.

$$\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n, \quad \sum_{n\geq 0} (n!)^\beta z^n, \quad \sum_{n\geq 0} (n \bmod 10) z^n, \quad \sum_{n\geq 0} z^{n!}, \quad \sum_{n\geq 0} z^{[n/3]}$$

où $[a]$ est la partie entière du réel a.

2. LOGARITHME COMPLEXE

Exercice 2 (Logarithmes complexes *)**.**

1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit L une fonction logarithme complexe sur U. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?
   (a) $\forall z, z' \in U, L(zz') = L(z) + L(z')$?
   (b) $\forall z, z' \in U$, tels que $re(z) > 0$ et $re(z') > 0$, $L(zz') = L(z) + L(z')$?
   (c) $\forall z \in U, L(\exp(z)) = z$?
2. Soit f une fonction holomorphe sur U, on dit que g est une détermination du logarithme de f si pour tout $z \in U$, $\exp(g(z)) = f(z)$.
   (a) Montrer qu'une telle fonction g existe si f est à valeurs dans ${\mathbb{C}_\alpha}^-$, $\alpha \in \mathbb{R}$ où
   $$ {\mathbb{C}_\alpha}^- = \mathbb{C} \setminus \exp(i\alpha)\mathbb{R}^+. $$
   (b) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
   — g est une détermination du logarithme complexe de f sur U
   — g est une primitive sur U de $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ et il existe $z_0 \in U$ tel que $\exp(g(z_0)) = f(z_0)$.

3. APPLICATIONS BIHOLOMORPHES

Exercice 3 (Application biholomorphe ***)**.**

Trouver une application biholomorphe f entre $A = \{z; 0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}, 0 < |z| < 1\}$ et $B = D(0;1)$. On pourra chercher f sous forme de composée d'applications biholomorphes, en passant par le demi-plan de Poincaré.

Exercice 4 (Suite d'automorphismes du disque **)**.**

Soient $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $w_k \in \Delta$, $\eta_k \in \partial\Delta$, pour $k \in \mathbb{N}$. On pose

$$\forall z \in \Delta, f_k(z) = \eta_k \frac{z - w_k}{\bar{w}_k z - 1}.$$

1. Vérifier que, pour tout k, f_k est un automorphisme de Δ.
2. Montrer que les deux propriétés ci-dessous sont équivalentes :
   (a) La suite (f_k) converge uniformément sur tout compact de Δ vers une fonction non constante.
   (b) Les suites $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent et $\lim w_k \in \Delta$.