UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

INTERROGATION (2 HEURES)

Nous recommandons de bien rédiger les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie... Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

On rappelle que $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit $\cosh z$ comme la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin z$ comme la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

Exercice 1 (Questions de cours, 4 points)**.**

1. Démontrer que la partie imaginaire d'une fonction holomorphe est harmonique.
2. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ non identiquement nulle. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $\Delta_\epsilon - \{0\}$.
3. Soient Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur Ω. L'intégrale de f le long de tout chemin fermé contenu dans Ω est-elle nulle ?

Exercice 2 (Deux équations, 4 points)**.**

1. Trouver toutes les solutions complexes de l'équation $\cosh(z) = 4i$.
2. Trouver toutes les solutions complexes de l'équation $z^i = -1$.

Exercice 3 (Logarithmes, 3 points)**.**

1. Peut on définir une détermination de la fonction logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\{\ x \in \mathbb{R}\ /\ x \geq 0\ \}$? Dans le cas affirmatif, donner une définition de cette détermination.
2. Même question sur le plan complexe privé de l'ensemble
$$[\,0, 1\,] \cup \{\ z \in \mathbb{C}\ /\ \ |\ z - 2\ | = 1 \text{ et } Im(z) \geq 0\ \} \cup [\,3, \infty\,[.$$
On pourra faire une figure pour préciser les notations.

Exercice 4 (Intégrales, 4 points)**.**

1. Paramétrer le cercle unité de $\mathbb{C}$ euclidien orienté parcouru dans le sens trigonométrique.
2. Calculer à l'aide d'un développement en séries entières et du paramétrage précédent $\int_{\partial\Delta} \frac{\cosh z}{z} dz$.
3. La fonction $\frac{\cosh(z)}{z}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C}^\times$? Si oui, l'expliciter.

Tourner s.v.p.

Exercice 5 (Intégrales, 5 points)**.**

1. Énoncer la formule de Cauchy pour les disques, en précisant les hypothèses. On pourra faire une figure pour préciser les notations.
2. Calculer
$$I_1 := \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z} dz.$$
3. Calculer
$$I_2 := \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z^2} dz.$$
4. Calculer
$$I_3 := \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z^3} dz.$$
5. Parmi les applications $\sin(z)$, $\frac{\sin(z)}{z}$, $\frac{\sin(z)}{z^2}$ et $\frac{\sin(z)}{z^3}$ sur $\mathbb{C}^\times$, lesquelles ont une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^\times$?

Un corrigé sera disponibile sur la page du cours
`https://perso.univ-rennes1.fr/christophe.mourougane/enseignements/2016-17/holo/holo.html`