UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

INTERROGATION (CORRIGÉ)

Exercice 1 (Questions de cours, 4 points)**.**

1. Démontrer que la partie imaginaire d'une fonction holomorphe est harmonique.
2. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ non identiquement nulle. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $\Delta_\epsilon - \{0\}$.
3. Soient Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur Ω. L'intégrale de f le long de tout chemin fermé contenu dans Ω est-elle nulle ?

Exercice 2 (Deux équations, 4 points)**.**

1. *Trouver toutes les solutions complexes de l'équation* $\cosh(z) = 4i$*.*

   Par définition de $\cosh$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$. Par conséquent, z est solution de $\cosh(z) = 8i$ si et seulement si e^z est solution de
   $$X^2 - 8iX + 1 = 0.$$
   si et seulement si $e^z = (4 + \sqrt{17})i = (4 + \sqrt{17})e^{-i\frac{\pi}{2}}$
   ou $e^z = (4-\sqrt{17})i = (\sqrt{17}-4)e^{-i\frac{\pi}{2}}$, si et seulement si $z \in \log(4+\sqrt{17})+i(\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z})$ ou $z \in \log(\sqrt{17} - 4) + i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z})$.

2. *Trouver toutes les solutions complexes de l'équation* $z^i = -1$*.*

   Soit $z \in \mathbb{C}$.
   $$\begin{aligned} z^i = -1 &\iff e^{i\log z} = e^{i\pi} \\ &\iff i\log z = i\pi \mod 2i\pi \\ &\iff \log z = \pi \mod 2\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{(2k+1)\pi}. \end{aligned}$$
   Les solutions sont les nombres complexes de la forme $e^{(2k+1)\pi}$ avec k entier.

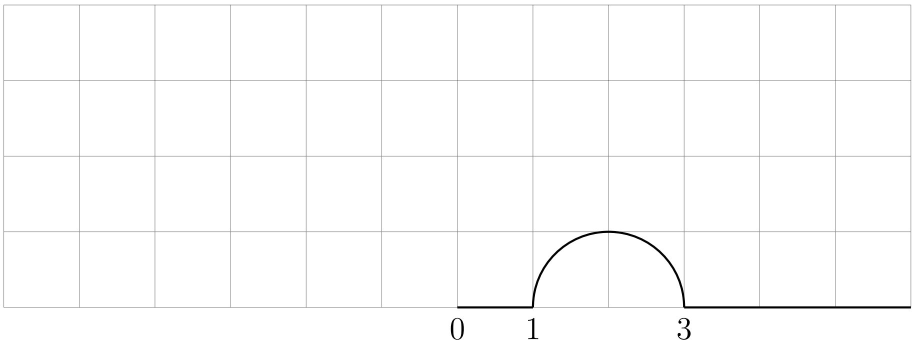
Exercice 3 (Logarithmes, 3 points)**.**

1. *Peut on définir une détermination de la fonction logarithme sur* $\mathbb{C}\backslash\{\, x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0 \,\}$ *? Dans le cas affirmatif, donner une définition de cette détermination.*

   On définit une détermination du logarithme en posant
   $$\begin{array}{rccc} l_+ : & \mathbb{C} - [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z = re^{i\theta}(r > 0, 0 < \theta < 2\pi) & \longmapsto & \log_{\mathbb{R}}(r) + i\theta. \end{array}$$

2. *Même question sur le plan complexe privé de l'ensemble*

$$L = [\,0,1\,] \cup \{\, z \in \mathbb{C} \;/\; \mid z-2 \mid = 1 \text{ et } Im(z) \geq 0 \,\} \cup [\,3,\infty\,[.$$



On définit une détermination du logarithme en posant

$$\begin{array}{lccc} \ell : & \mathbb{C} - L & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z = re^{i\theta} (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mid z-2 \mid \leq 1 \text{ et } Im(z) \geq 0, \\ \quad \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r) + i(\theta + 2\pi). \\ \text{si } \mid z-2 \mid > 1, \\ \quad \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r) + i\theta \end{array} \right. \end{array}$$

On vérifie que ℓ est continue : en particulier sur le disque ouvert de centre $(2,0)$ et de rayon 1, ℓ coïncide avec la fonction $\log + 2i\pi$, qui est continue. On vérifie aussi que pour tout $z \in \mathbb{C} - L$, $e^{\ell(z)} = z$: c'est donc une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} - L$.

Exercice 4 (Intégrales, 4 points)**.**

1. *Paramétrer le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique.*

   L'application

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

   est un paramétrage du cercle unité du plan complexe euclidien parcouru dans le sens trigonométrique.

2. *Calculer à l'aide du paramétrage précédent* $\int_{\partial\Delta} \frac{\cosh z}{z} dz$.

   Comme le rayon de convergent de la série qui définit $\cosh$ est infini, la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$ est normalement donc uniformément convergente sur le cercle unité vers la fonction $\frac{\cosh z}{z}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} \frac{\cosh z}{z} dz &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial\Delta} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma(\theta))^{2n-1}}{(2n)!} \gamma'(\theta) d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} i e^{i(2n)\theta} d\theta = 2i\pi. \end{aligned}$$

3. *La fonction* $\frac{\cosh(z)}{z}$ *admet-elle une primitive sur* $\mathbb{C}^\times$ *? Si oui, l'expliciter.*

   Comme l'intégrale de la fonction $\frac{\cosh(z)}{z}$ sur le chemin fermé $\partial\Delta$ de $\mathbb{C}^\times$ n'est pas nulle, la fonction $\frac{\cosh(z)}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^\times$.

Exercice 5 (Intégrales, 5 points)**.**

1. *Enoncer la formule de Cauchy pour les disques, en précisant les hypothèses.*
   question de cours.

2. *Calculer* $I_1 := \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z} dz$.
   L'application $\sin$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc
   $$I_1 = \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z-0} dz = (2i\pi)\sin(0) = 0.$$

3. *Calculer* $I_2 := \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z^2} dz$.
   L'application $\frac{\sin(z)}{z}$ se prolonge en 0 par la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$ de rayon de convergence infini donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc
   $$I_2 = \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z^2} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{\frac{\sin(z)}{z}}{z-0} dz = (2i\pi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}(0) = 2i\pi.$$

4. *Calculer* $I_3 := \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z^3} dz$.
   L'application $\frac{\sin(z)-1}{z^2}$ se prolonge en 0 par la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc $\int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)-1}{z^3} dz = (2i\pi) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}(0) = 0$. Donc,
   $$I_3 = \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z^3} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)-1}{z^3} dz + \int_{\partial\Delta} \frac{1}{z^3} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{1}{z^3} dz = 0.$$

5. *Parmi les applications* $\sin(z)$, $\frac{\sin(z)}{z}$, $\frac{\sin(z)}{z^2}$ *et* $\frac{\sin(z)}{z^3}$ *sur* $\mathbb{C}^\times$, *lesquelles ont une primitive holomorphe sur* $\mathbb{C}^\times$ *?*
   L'application $\sin(z)$ admet $-\cos(z)$ comme primitive sur $\mathbb{C}^\times$ et même sur $\mathbb{C}$.
   L'application $\frac{\sin(z)}{z}$ se prolonge sur $\mathbb{C}$ en la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$. Elle admet donc sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{C}^\times$ la primitive $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.
   L'application $\frac{\sin(z)}{z^2}$ a une intégrale non nulle sur le chemin fermé $\partial\Delta$ de $\mathbb{C}^\times$: elle n'admet donc pas de primitive sur $\mathbb{C}^\times$.
   L'application $\frac{\sin(z)}{z^3} = \frac{\sin(z)-1}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} + \frac{1}{z^3}$ admet comme primitive sur $\mathbb{C}^\times$
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{z^{2n}}{2n} - \frac{1}{4z^4}.$$