Chap III

Géométrie euclidienne dynamique

On considère maintenant les déformations et déplacements de figures dans l'espace ambiant euclidien orienté E

I) Les projections en dimension 2

Déf : Soit E un plan euclidien. Soit $A \in E$ et $\vec{u} \in \vec{E}$. Soit d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Alors, la projection orthogonale sur d est l'application

$$p_d \quad E \longrightarrow E$$

$$M \longmapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} M' \in d \\ \overrightarrow{MM'} \perp \vec{u} \end{cases}$$

Ecriture de la projection à l'aide du produit scalaire

$M' \in d$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; \overrightarrow{AM'} = \lambda \vec{u}$

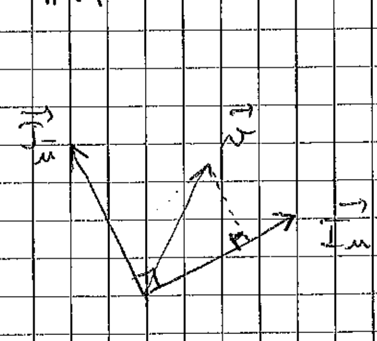
$\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}) \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{u}$

Donc $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$

Corollaire : Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

$\sin^2(\vec{u}, \vec{v}) = 1 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

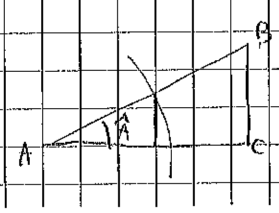


Si $\vec{u} \in \vec{E}$ $\vec{v} \in \vec{E}$ non nuls

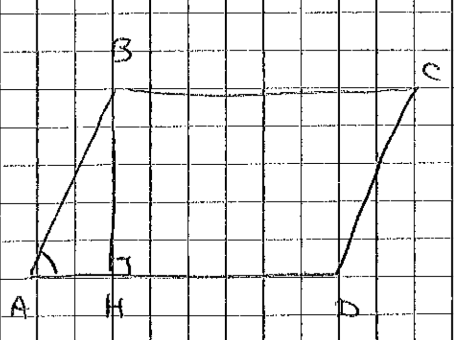
$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$ car $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ unitaires.

Dans un triangle rectangle non aplati

$\cos \hat{A} = \dfrac{AC}{AB}$ $\quad \sin \hat{A} = \dfrac{BC}{AB}$



Corollaire : Aire du parallélogramme



$\mathcal{A}(ABCD) = AD \quad BH$

$BH^2 = (\vec{BA} + \vec{AH})^2$

$= (-\vec{AB} + \lambda\vec{AD})^2 \qquad \lambda = \dfrac{\vec{AB}.\vec{AD}}{AD^2}$

$$\boxed{\mathcal{A}(ABCD)^2 = AD^2 \; AB^2 - (\vec{AB}.\vec{AD})^2}$$

$= AD^2 \; AB^2 \; \sin^2 \hat{A}$

[Le cours du lundi 24 oct est avancé au lundi 10 oct à 16h15]

II) Les isométries

1) Les symétries axiales

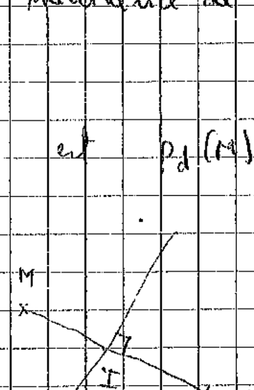
Soit d une droite. La symétrie axiale d'axe d est la transformation du plan E qui envoie le point M de E sur M' tel que

$$\begin{cases} \vec{MM'} \perp \vec{u} \\ \text{milieu de } [M,M'] \in d \end{cases}$$

En d'autres termes, si $M \in d$ $\quad s_d(M) = M$

$M \notin d$ $\quad s_d(M)$ est tel que d est la médiatrice de $[M, s_d(M)]$

En particulier, le milieu de $[M, s_d(M)]$ est $p_d(M)$ le projeté orthogonal de M sur d



Si d est la droite passant par A et de vect $\vec{u}$

$\vec{AM'} = \vec{AI} + \vec{IM'} = \vec{AI} + \vec{MI} = A$

$= \vec{AM} + \vec{MM'} = \vec{AM} + 2\vec{MI} = \vec{AM} + 2\vec{MA} + 2\vec{AI} = 2\vec{AI} - \vec{AM} = 2\dfrac{\langle \vec{AM}, \vec{u}\rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle}\vec{u} - \vec{AM}$

II) Les isométries

Définition : Soit E un espace euclidien orienté.

Une application $f : E \to E$ est appelée isométrie si elle conserve les longueurs

i.e. pour tout $(M_1, M_2) \in E^2$ $\quad f(M_1)f(M_2) = M_1M_2$

Propriétés :

Les isométries conservent

- le produit scalaire
- l'orthogonalité
- les mesures d'angles géométriques
- l'alignement.

La démonstration utilise

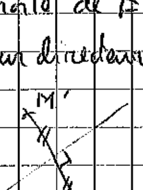
- l'identité de polarisation $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[(\vec{u}+\vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2\right]$
- la définition de l'orthogonalité par produit scalaire
- la formule $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$
- le fait que les médiatrices sont des droites.

On donne des exemples d'isométries

1/ Les symétries axiales

Déf : Soit E un plan affine euclidien. Soit d une droite de E de vecteur directeur $\vec{u}$.

La symétrie axiale d'axe d est l'application



$$s_d : E \longrightarrow E$$
$$M \longmapsto M' = s_d(M) \text{ tel que } \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp \vec{u} \\ \text{milieu de } [MM'] \in d. \end{cases}$$

En particulier le milieu de $[M, s_d(M)]$ est le projeté orthogonal de M sur d.

Expression en termes de produit scalaire : Soit d de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A

Si $M \in E$ et $M' = s_d(M)$

$$\overrightarrow{AM'} = 2 \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} - \overrightarrow{AM}.$$

Propriétés : Les symétries axiales transforment les angles de vecteurs en des angles de mesures opposées.
(voir en TD)

2) <u>Les translations</u>

<u>Définition</u> : Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \vec{E}$.
La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application

$$t_{\vec{u}} : E \longrightarrow E$$
$$M \longmapsto M' = t_{\vec{u}}(M) \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Propriété : Les translations sont caractérisées par

pour tout $(M_1, M_2) \in E^2$ $\quad \overrightarrow{f(M_1) f(M_2)} = \overrightarrow{M_1 M_2}$

Les translations sont des isométries qui conservent les angles de vecteurs en mesure.

3) Les symétries glissées

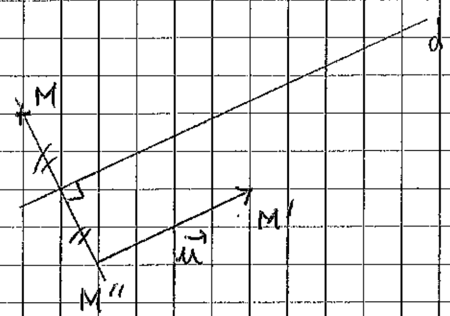
Déf : Soit E un plan euclidien orienté.

Soit d une droite et $\vec{u}$ un vecteur ~~parallèle~~ directeur de $\vec{u}$.

La symétrie glissée d'axe d et de vecteur $\vec{u}$ est

$$s_{d,\vec{u}} = s_d \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_d$$

C'est une isométrie qui transforme les angles de vecteurs en angles de mesures opposées.



4/ Les rotations

Déf : Soit E un plan euclidien orienté

Soit Ω un point de E et θ un nombre réel.

La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application

$$r_{\Omega,\theta} : E \longrightarrow E$$

$$M \longmapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

Remarques : * Si $\theta' = \theta \ [2\pi]$ alors $r_{\Omega\theta} = r_{\Omega\theta'}$

* Si $\theta = 0 \ [2\pi]$ $r_{\Omega\theta} = Id_E$

* Si $\theta = \pi \ [2\pi]$ $r_{\Omega\theta} = s_\Omega$ la symétrie centrale de centre Ω.

Propriétés :

* Par le théorème d'Al-Kashi, une rotation est une isométrie.

* Une rotation conserve les mesures d'angles de vecteurs.

On cherche maintenant à montrer que toute isométrie du plan est
- soit une translation
- soit une rotation
- soit une symétrie axiale
- soit une symétrie glissée

Déf : Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application.

* Un point M de E est dit fixé par f si $f(M) = M$

* Une partie F de E est dite globalement fixée par f si pour tout M de F, $f(M)$ appartient à F

* Une partie F de E est dite fixe point par point si tous les points de F sont des points fixes de f.

Exemples. * Une translation n'a pas de point fixe.
Toutes les droites parallèles au vecteur de translation sont globalement fixes.

* Une symétrie glissée n'a pas de points fixes et une seule droite globalement fixe.

<u>Théorème</u> : Soit E un plan euclidien orienté. Soit $f : E \to E$ une isométrie

1) Si f a (au moins) trois points fixes non alignés, f est l'identité de E

2) Si f a deux points fixes distincts A, B f est soit l'identité soit la symétrie d'axe (AB)

3) Si f n'a qu'un unique point fixe A, f est une rotation de centre A.

<u>Dem</u> : 1) Si A, B, C sont fixés par f.

Soit $M \in E$ et $M' = f(M)$

$AM' = f(A)f(M) = AM$ donc $A \in$ médiatrice de $[MM']$

De même B et C appartient à la médiatrice de $[MM']$.

Comme la médiatrice de $[MM']$ contient trois points non alignés $M = M'$.

2) Soit C non aligné avec A et B et $C' = f(C)$.

Si $C' = C$ $f = Id_E$ par 1)

Si $C' \neq C$, soit $s_{(AB)}$.

Comme (AB) est la médiatrice de $[CC']$ $s_{(AB)}(C') = C$.

Donc $s_{(AB)} \circ f$ a A, B, C comme points fixes.

Donc $f = s_{(AB)}$

3) Soit $B \neq A$ et $B' = f(B)$. Soit d la médiatrice de $[B, B']$

$AB' = AB$ donc $A \in d$

Donc $s_d \circ f$ a A et B comme point fixe.

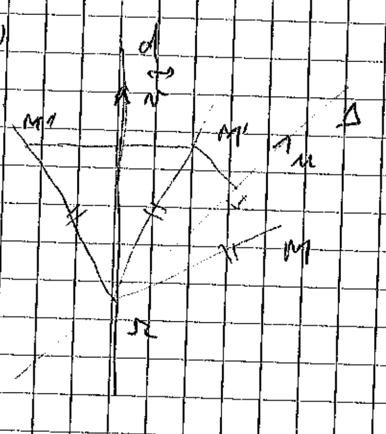
Comme $f \neq Id$, $f = s_d \circ s_{(AB)}$

Lemme : Soit E un plan euclidien et d, Δ deux droites de E

1) Si d et Δ^* sont sécantes en A, $s_d \circ s_\Delta$ est la rotation de centre A d'angle ~~de vecteur~~ $\theta \equiv 2\,\mathrm{mes}(\widehat{\Delta, d})$ $[2\pi]$

2) Si $d \parallel \Delta^*$ alors $s_d \circ s_\Delta$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$ où $\vec{u} \perp \vec{d}$ et tel que $t_{\vec{u}}(\Delta) = d$

Dém. 1) Soit $M \in E$ $M' = s_\Delta(M)$ $M'' = s_d(M')$



$\Omega M'' = \Omega M' = \Omega M$

$(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv -(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M})$ $[2\pi]$

$(\vec{v}, \overrightarrow{\Omega M''}) \equiv -(\vec{v}, \overrightarrow{\Omega M'})$ $[2\pi]$

$\mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) \equiv \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \overrightarrow{\Omega M''})$ $[2\pi]$

$\equiv +(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \overrightarrow{\Omega M'})$

$\equiv 2\,\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ $[2\pi]$

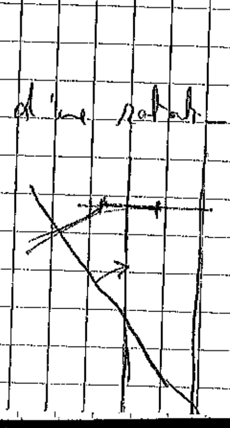
2) Soit $M \in E$ $m = p_\Delta(M)$ $M' = s_\Delta(M)$ $m' = p_d(M')$ M''

$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{Mm} + \overrightarrow{mm'} + \overrightarrow{m'M''}$

$= +\overrightarrow{mM'} + \overrightarrow{mm'} + \overrightarrow{m'M'}$

$= 2\,\overrightarrow{mm'}$

Lemme : Composée d'une translation et d'une rotation d'angle θ est une rotation d'angle θ



Théorème : Toute isométrie du plan est composée, d'une, de deux ou trois symétrie axiale

Dem : Soit $f : E \to E$ une isométrie.

Soit $A \in E$ et $A' = f(A)$

Soit $t_{\vec{A'A}} \circ f$: c'est une isométrie qui admet un point fixe.

Donc $t_{\vec{AA'}} \circ f$ est soit l'identité

une symétrie axiale

une rotation

Donc f est soit $t_{\vec{AA'}}$

soit la composée de trois symétries axiales

soit une composée de deux symétries axiales

Théorème : Toute isométrie du plan est soit

- une translation
- une rotation

) isométries directes

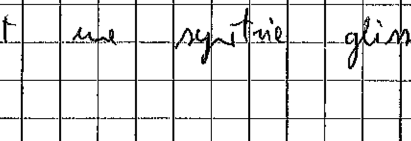
- soit une symétrie
- soit une symétrie glissée.

) isométries indirectes

Dem : Il suffit d'étudier les composées de trois symétries axiales

1) $d_1 \parallel d_2$ $d_2 \parallel d_3$

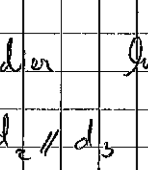
2)



$d_1 \parallel d_2$ $d_2 \perp d_3$

d_1 d_2 d_3 concourantes

3/



1 point fixe, ne conservant pas les angles de orientés

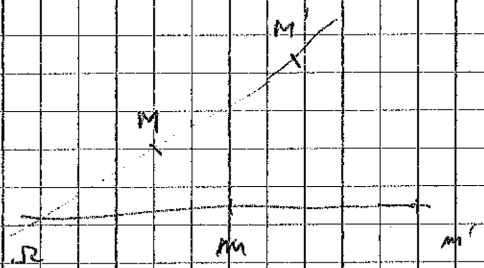
symétrie.

D'autres cas seront vus en TD

III) Les homothéties

Déf : Soit E un espace euclidien et $k \in \mathbb{R}$ et $\Omega \in E$.
L'homothétie de centre Ω et de rapport k est l'application

$$h_{\Omega,k} : E \longrightarrow E$$
$$M \longmapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$$



Prop : 1) Si f est une homothétie de rapport k
pour tout $(M_1, M_2) \in E^2$ $\quad \overrightarrow{f(M_1)f(M_2)} = k\,\overrightarrow{M_1M_2}$

2) Si $f : E \to E$ vérifie
pour tout $(M_1, M_2) \in E^2$ $\quad \overrightarrow{f(M_1)f(M_2)} = k\,\overrightarrow{M_1M_2}$
alors ~~f est~~ soit
- si $k = 1$ f est une translation
- si $k \neq 1$ f est une homothétie de rapport k

Dém : 1) $\overrightarrow{f(M_1)f(M_2)} = \overrightarrow{f(M_1)\Omega} + \overrightarrow{\Omega f(M_2)} = k\,\overrightarrow{M_1\Omega} + k\,\overrightarrow{\Omega M_2}$

2) Si $k = 1$ déjà vu
Si $k \neq 1$ soit $A \in E$ et $A' = f(A)$
Soit Ω défini par $\overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{\overrightarrow{AA'}}{1-k}$

Soit $M \in E$ et $M' = f(M)$
~~ΩM~~ $\overrightarrow{f(A)f(M)} = k\,\overrightarrow{AM}$ $\quad \overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$
$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AA'}\left(\dfrac{1}{k-1} + 1\right) + k\,\overrightarrow{AM}$
$= k\,\overrightarrow{\Omega A} + k\,\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

Corollaire 1 : La composée d'une homothétie et d'une translation

Soit f une homothétie ou une translation

g ―――――――――――

Alors $g \circ f$ est soit une homothétie, soit une translation.

Corollaire 2 : Soit f une homothétie ou une translation :

1/ f transforme une droite en une droite

Alors 2/ f transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles

(si $d_1 \parallel d_2$ alors $f(d_1) \parallel f(d_2)$)

3/ f transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.

Dem : 1/ Si A, B, C sont alignés et $A \neq B$, il existe λ / $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{A'C'} = \cancel{\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}}\ k \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ et A', B', C' sont alignés

2/ Si $(AB) \parallel (CD)$

$(A'B') \parallel (C'D')$

IV) Les cas d'isométries des triangles.

VI) Les homothéties

Soit $\Omega \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application $h_{\Omega\lambda} : E \longrightarrow E$

$$M \longmapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$$

Pour $\lambda = -1$ on retrouve la symétrie centrale.

Prop : Soit $k \neq 1$. Les homothéties et translations sont caractérisées par

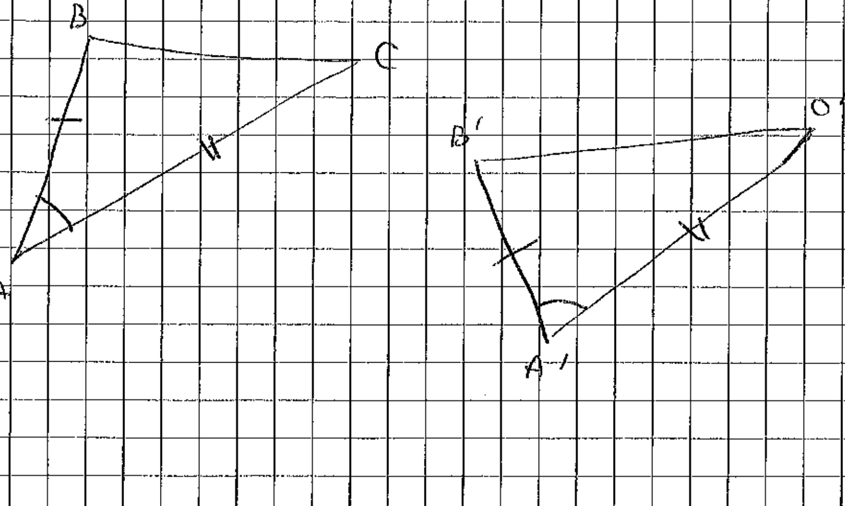
$$\forall M_1, M_2 \qquad \overrightarrow{f(M_1)f(M_2)} = k\,\overrightarrow{M_1M_2}$$

V) Les cas d'égalité des triangles

Déf : Deux figures sont isométriques s'il existe une isométrie qui transforme l'une en l'autre.

Théo (1er cas d'égalité)

Si deux triangles ont deux côtés de même longueur et d'angle géométrique qu'ils forment de même mesure alors ils sont isométriques.



Dém : Par translation on amène A sur A'.

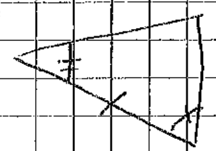
Par rotation on amène ensuite l'image de B sur B' car $AB = A'B'$.

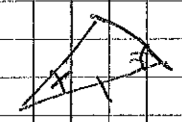
Si $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = mes(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})\ [2\pi]$ alors comme $AC = A'C'$ cette rotation transforme C en C'.

Si $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -mes(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})\ [2\pi]$ par symétrie d'axe $(A'B')$ on se ramène à la situation précédente.

Théo (deuxième cas d'isométrie)

On suppose que ABC et A'B'C'
ont un côté de même longueur
et les angles portés par ce côté
de même mesure
Alors ABC et A'B'C'
sont isométriques.





Théo (troisième cas d'isométrie)

On suppose que deux triangles
ont leur côté deux à deux
de même longueur
Alors les triangles sont isométriques

V) Les similitudes

<u>Définition</u> : Soit E un plan euclidien orienté. Soit $f : E \to E$ une application.

On dit que f est une <u>similitude</u> s'il existe un nombre réel non nul k tel que f multiplie toutes les distances par k.

i.e. pour tout (M_1, M_2)

$$f(M_1)f(M_2) = k\, M_1M_2$$

<u>Théorème</u> : Soit E un plan euclidien orienté.

1) La composée d'une homothétie et d'une similitude isométrie de rapport k est une similitude de rapport k.

2) Toute similitude de E se décompose comme composée d'une homothétie suivie d'une isométrie.

3)

d'une isométrie suivie d'une homothétie.

Dem : 3) Soit f une similitude de rapport k $(k \neq 0)$

Soit h une homothétie de rapport k^{-1} de centre A.

Alors $h_{A,1/k} \circ f$ est une isométrie et

$$f = h_{A,k} \circ \left(h_{A,1/k} \circ f \right)$$

Corollaire : Toute similitude est composée d'une homothétie suivie d'une translation, d'une rotation, d'une symétrie ou d'une symétrie glissée.

Définition : Deux triangles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ (ABC et A'B'C') d'un plan euclidien orienté sont dits semblables s'il existe une similitude qui envoie $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$.

Théorème : Soit E un plan euclidien orienté

1) Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont deux triangles orientés semblables alors on ~~peut~~ a quitte à changer le noms des sommets en $A_1A_2A_3$ et $A'_1A'_2A'_3$ alors il existe une constante k telle que

$$A'_1A'_2 = k\,A_1A_2 \qquad A'_1A'_3 = k\,A_1A_3 \qquad A'_2A'_3 = k\,A_2A_3$$

$$\text{mes}\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_3}\right) \equiv \text{mes}\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right) \ [2\pi] \ \ldots$$

2) Soit ABC et A'B'C' deux triangles tels qu'il existe une constante k tel que

3ième cas $\quad A'B' = AB \qquad AC = A'C' \qquad BC = B'C'$

alors ABC et A'B'C' sont semblables.

3) Soit ABC et A'B'C' deux triangles tels que

2ième cas $\quad \text{mes}\,\widehat{BAC} = \text{mes}\,\widehat{B'A'C}$ et $\text{mes}(\widehat{ABC}) = \text{mes}(\widehat{AB'C'})$

alors ABC ~~sont~~ A'B'C' sont semblables.

4) Soit ABC et A'B'C' deux triangles

1er cas d'isométrie $\quad$ si $\text{mes}\,\widehat{BAC} = \text{mes}\,\widehat{B'A'C'}$ et $\exists k \,/\, A'B' = k\,AB \quad A'C' = k\,AC$

alors ABC et A'B'C' sont semblables.

Chap IV

Utilisation des nombres complexes en géométrie

I) Définitions et premières correspondances

II) Relations trigonométriques

III) Écriture des similitudes

I) Définitions et premières correspondances

Soit E un plan euclidien orienté.

Soit $(O, \vec{I}, \vec{J})$ un repère orthonormé direct. $\left(\vec{r}_{+\frac{\pi}{2}}(\vec{I}) = \vec{J}\right)$

À tout point M du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ on associe

un nombre complexe z_M appelé l'affixe de M défini par $z_M = x_M + i\, y_M$

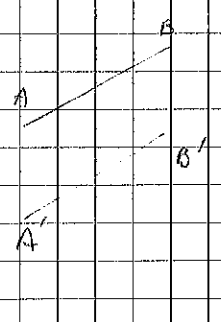
À tout bipoint (A,B) on associe le nombre complexe $z_{(A,B)} = z_B - z_A = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$

Si (A,B) et (A',B') sont équipollents (i.e. $ABB'A'$ est un parallélogramme)

alors $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ $\quad x_B - x_A = x_{B'} - x_{A'}$

$y_B - y_A = y_{B'} - y_{A'}$

et donc $z_{(A',B')} = z_{(A,B)}$



On peut donc parler de l'affixe

d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $\quad Z_{\vec{u}} = X + iY$

L'avantage de l'utilisation des nombres complexes est la multiplication et la conjugaison

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs

$Z_{\vec{u}} = X + iY \qquad Z_{\vec{v}} = X' + iY' \qquad \overline{Z_{\vec{v}}} = X' - iY'$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathrm{re}\left(Z_{\vec{u}}\, \overline{Z_{\vec{v}}}\right)$

$\|\vec{u}\|^2 = X^2 + Y^2$ car $(O, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère orthonormé

$= Z_{\vec{u}} \overline{Z_{\vec{u}}}$

$AB^2 = (z_B - z_A)\overline{(z_B - z_A)}$

Ecriture polaire : Si $z = x+iy$ est un nombre complexe non nul

on peut écrire $z = re^{i\theta}$ où $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$

$z_M = x_M + i y_M = re^{i\theta}$ $\quad r = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = OM$

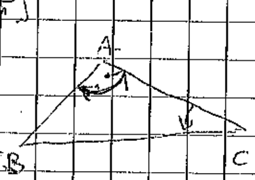
$= r\cos\theta + i r\sin\theta$ $\quad \theta \equiv mes(\vec{OM}, \vec{i}) \quad [2\pi]$

II/ Relations trigonométriques dans un triangle

Soit ABC un triangle, z_A, z_B, z_C les affixes correspondantes

$z_B - z_A = c\, e^{i\theta}$ avec $\theta = mes(\vec{AB}, \vec{AB})$

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{c}{b} e^{-i\hat{A}}$ avec $\hat{A} \equiv mes(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) \quad [2\pi]$



$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{a}{b} e^{i\hat{C}}$ $\quad \hat{C} \equiv mes(\vec{CA}, \vec{CB})$

$\frac{c}{b} e^{-i\hat{A}} + \frac{a}{b} e^{i\hat{C}} = 1$

$b = c\cos\hat{A} + a\cos\hat{C}$

$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$

III) Écriture des similitudes

1) Premières opérations

L'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ correspond à $E \longrightarrow E$

Soit $u \in \mathbb{C}$

$z \longmapsto z+u$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M\begin{pmatrix} x+u_x \\ y+u_y \end{pmatrix}$

donc à la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$

L'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Soit $k \in \mathbb{R}-\{0\}$

$z \longmapsto kz$

l'homothétie de centre O de rapport k

car $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$

L'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\theta \in \mathbb{R}$

$z \longmapsto e^{i\theta} z$

la rotation d'angle θ car $|e^{i\theta} z| = |z|$

et $\arg(e^{i\theta} z) = \operatorname{mes}(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM'}})$

$\equiv \theta + \arg z = \operatorname{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) + \theta$

L'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto \bar{z}$

la symétrie axiale d'axe $(O, \vec{i})$

2/ Ecriture d'une similitude générale

* Une homothétie. Soit $\Omega(\omega)$ d'affixe ω et $k \in \mathbb{R}-\{0\}$

L'homothétie de centre Ω et de rapport k s'écrit comme

$$h_{\Omega k} = t_{\vec{O\Omega}} \circ h_{Ok} \circ t_{-\vec{O\Omega}}$$

et correspond donc à

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z' = k(z-\omega) + \omega = kz + (1-k)\omega \end{aligned}$$

* Une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

s'écrit

$$r_{\Omega\theta} = t_{\vec{O\Omega}} \circ r_{O,\theta} \circ t_{-\vec{O\Omega}}$$

et correspond donc à

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega = e^{i\theta} z + (1-e^{i\theta})\omega. \end{aligned}$$

* Si $a = \lambda e^{i\theta}$, $z \longmapsto az$ correspond à la composée $r_{O,\theta}$ et $h_{O,\lambda}$.

Théorème : Soit E un plan affine euclidien

1) Toute similitude directe a une expression de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto az + b \end{aligned} \quad \text{où } (a,b) \in (\mathbb{C}-\{0\}) \times \mathbb{C}$$

2) Toute application de la forme précédente correspond à une similitude directe

3) Toute similitude indirecte a une expression de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto a\bar{z} + b \end{aligned} \quad \text{où } (a,b) \in (\mathbb{C}-\{0\}) \times \mathbb{C}$$

4) Toute application de la forme précédente correspond à une similitude indirecte.

Corollaire : Soit f une similitude directe

Alors soit f est une translation

soit f est la composée d'une homothétie et d'une rotation

de même centre

Dem : Soit f une similitude directe. Alors il existe a, b $a \neq 0$

tel que $f : z \mapsto az+b$

* Si $a = 1$ f correspond à une translation

* Si $a \neq 1$ soit $\omega = \frac{b}{1-a}$ Alors $f(\omega) = \frac{ab}{1-a} + b = \frac{b}{1-a} = \omega$

$$f(z) - \omega = az + b - \frac{b}{1-a} = a\left(z - \frac{b}{1-a}\right) = a(z - \omega)$$

Avec $a = \lambda e^{i\theta}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

f est la composée de l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ de rapport λ

et de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ de rapport λ d'angle θ