UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Agrégation

Feuille de TD n°1
Exercices sur les actions de groupes

On rappelle

Théorème (Théorème de Cauchy)**.** *Soit n un entier naturel non nul. Soit G un groupe d'ordre n et p un diviseur premier de n. Alors G a un élément d'ordre p.*

Théorème (Théorème de Sylow)**.** *Soit p un nombre premier et m un entier non multiple de p. Soit G un groupe de cardinal $|G| = p^d m$.*

1. *Alors G admet un p-sous groupe de Sylow (i.e. un sous groupe d'ordre p^d).*
2. *Tout p sous groupe de G est contenu dans un p-Sylow de G.*
3. *Les p-Sylow de G sont tous conjugués.*
4. *Le nombre de p-Sylow est congru à 1 modulo p.*

1. Généralités sur les groupes

Exercice 1.

Soit H un sous groupe d'un groupe fini G et G/H l'ensemble des classes à gauche. Montrer que l'indice de H (i.e. le cardinal de G/H) et l'ordre de H divisent l'ordre du groupe G.

Exercice 2 (Extrait du problème de Mathématiques générales 2007)**.**

Soit G le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/148\mathbb{Z}$. On notera $[a]$ la classe de l'entier a dans $\mathbb{Z}/148\mathbb{Z}$.

1. Déterminer le cardinal N de G.
2. Montrer que la classe $[5]$ est dans G.
3. Montrer que $[5]^{N-1}$ est un inverse de $[5]$.
4. Décomposer $N-1$ en base 2, et en déduire le calcul de l'inverse de $[5]$.
5. Donner une autre méthose pour déterminer cet inverse.

Exercice 3 (Décompositions explicites)**.**

1. On considère l'élément de $\mathfrak{S}_8$:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$
Décomposer σ en un produit de transpositions et calculer sa signature. Peut-on écrire σ comme produit de douze transpositions ?
2. Soit σ l'élément de $\mathfrak{S}_{11}$:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 7 & 9 & 11 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$
Décomposer σ en un produit de cycles à support disjoints. Préciser l'ordre de σ, et la signature de σ. Calculer σ^2 et σ^3. Écrire σ^{-1} en un produit de cycles à support disjoints.

Exercice 4.

1. Si c est le cycle $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, c^2 est-il un cycle ?
2. Si c est un cycle de $\mathfrak{S}_n$ d'ordre l et k un entier naturel, calculer l'ordre de c^k.

Exercice 5.

Soit n un entier naturel supérieur à 3, $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de n lettres et $\mathfrak{A}_n$ le groupe alterné.

1. Calculer les produits de transpositions $(a, b)(b, c)$, puis $(a, b)(c, d)$.
2. Montrer que les cycles d'ordre 3 engendrent $\mathfrak{A}_\mathfrak{n}$.

Exercice 6.

1. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est-il simple ?
2. Le groupe $\mathbb{Z}/89\mathbb{Z}$ est-il simple ?
3. Le groupe $\mathbb{Z}/221\mathbb{Z}$ est-il simple ?

2. Actions de groupes

Exercice 7 (Des petites questions)**.**

On considère l'action d'un groupe G sur un ensemble E.

1. Montrer qu'un sous-ensemble de E est globalement stable par G si et seulement s'il est réunion d'orbites.
2. Montrer que deux éléments dans la même orbite ont des stabilisateurs conjugués.
3. Montrer que deux éléments conjugués dans le groupe G fixent le même nombre d'éléments.

Exercice 8.

On fixe une action d'un groupe G sur un ensemble fini E. On suppose que l'ordre de G est 15, que le cardinal de E est 17 et que E n'a pas de point fixé par tous les éléments du groupe G. Déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune d'elles.

Exercice 9.

1. Soit G un p-groupe agissant sur un ensemble fini E. Montrer que le cardinal de l'ensemble des points fixes de l'action est congru, modulo p, au cardinal de E.
2. En considérant une action de G sur lui-même, montrer que le théorème de Burnside : le centre d'un p-groupe non réduit à l'élément neutre n'est pas réduit à l'élément neutre.

Exercice 10.

1. Montrer que si le quotient d'un groupe par son centre est cyclique alors le groupe est abélien, donc égal à son centre.
2. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien.
3. Montrer que le centre d'un groupe non abélien d'ordre p^3 est d'ordre p. En déduire que le nombre de classes de conjugaison est $p^2 + p - 1$. (On pourra étudier l'action de G sur lui-même par conjugaison : ses points fixes, l'orbite des éléments, le stabilisateur des éléments...)

Exercice 11.

Soit p un nombre premier et G un p-groupe d'ordre p^d.

1. Déterminer un sous-groupe central d'ordre p.
2. Soit c un entier naturel inférieur à d. Montrer par récurrence que G contient un sous-groupe distingué d'ordre p^c.

Exercice 12.

Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous-groupe de G d'indice $p > 1$.

1. Montrer que les orbites de l'action de H sur G/H (l'ensemble quotient G/H des classes à gauche de G modulo H) par translation à gauche sont réduites à des points.
2. Montrer que H est distingué.

Exercice 13 (Le théorème de Cayley)**.**

1. Pour tout élément a d'un groupe fini G d'ordre n, on définit l'application
$$\begin{array}{cccc} l_a & : & G & \to & G \\ & & g & \mapsto & ag \end{array}$$
Montrer que l_a est une bijection de G, produit de $\frac{n}{ordre(a)}$ cycles à support disjoints tous de longueur $ordre(a)$.
2. Montrer alors que l'application
$$\begin{array}{cccc} l & : & G & \to & \mathfrak{S}(G) \\ & & a & \mapsto & l_a \end{array}$$
est un morphisme de groupes, injectif. Tout groupe fini est donc isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations de ses éléments.
3. soit p un nombre premier. Construire un plongement de $\mathfrak{S}_N$ dans $GL(N, \mathbb{F}_p)$ par les matrices de permutations.
4. En déduire que tout groupe fini d'ordre N est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe $GL(N, \mathbb{F}_p)$.

Exercice 14.

Soit G le sous-groupe de $\mathfrak{S}_7$ engendré par $\alpha = (2,4,6)(5,7,1)$ et $\beta = (3,4)(5,6)$. On se propose de déterminer l'ordre de G. On considère pour cela les ensembles suivants :

$$G_1 = \{\varphi \in G \mid \varphi(1) = 1\} \qquad G_2 = \{\varphi \in G_1 \mid \varphi(2) = 2\} \qquad G_3 = \{\varphi \in G_2 \mid \varphi(3) = 3\}$$
$$X_1 = \{\varphi(1) \mid \varphi \in G\} \qquad X_2 = \{\varphi(2) \mid \varphi \in G_1\} \qquad X_3 = \{\varphi(3) \mid \varphi \in G_2\}.$$

Étant donné un ensemble Y, on note $|Y|$ le cardinal de Y.

1. Montrer que 6 divise $\mid G \mid$.
2. Quelle relation existe-t-il entre $|G|$ et $|X_1|\ |X_2|\ |X_3|\ |G_3|$?
3. Expliciter X_1.
4. Expliciter $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$ et $\delta = \gamma\beta\gamma^{-1}$. En déduire $X_3 = \{3,4,5,6\}$ ou $X_3 = \{3,4,5,6,7\}$ et $X_2 = \{2,7\}$ ou $X_2 = \{2,3,4,5,6,7\}$.
5. On fait agir G sur l'ensemble des parties de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Déterminer l'orbite de la partie $\{1,2,7\}$. En déduire que 7 est fixé par les éléments de G_2 et que G_3 est réduit à l'identité.
6. En déduire $|G|$.

3. Sous-groupes de Sylow

Exercice 15 (Des petites questions)**.**

1. L'entier 374 divise-t-il l'ordre du groupe $\mathbb{Z}/374\mathbb{Z}$? Le groupe $\mathbb{Z}/374\mathbb{Z}$ a-t-il un élément d'ordre 374 ? a-t-il un élément d'ordre 187 ?
2. Déterminer tous les diviseurs de 374 ? Le groupe $\mathbb{Z}/374\mathbb{Z}$ a-t-il un sous-groupe d'ordre chacun des diviseurs de 374 ?

Exercice 16.

1. En comptant le nombre de base de $\mathbb{F}_p^n$ déterminer le cardinal de $GL(n, \mathbb{F}_p)$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes est un p-sous-groupe de Sylow de $GL(n, \mathbb{F}_p)$.

Exercice 17.

1. Vérifier que les p-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_p)$ sont monogènes.
2. Soit A et B deux matrices de $GL(2, \mathbb{F}_p)$ d'ordre p. Montrer que A est conjuguée à une puissance de B.

Exercice 18.

Soit p un nombre premier et m un entier non multiple de p. Soit G un groupe de cardinal $|G| = p^d m$.

1. Montrer que le nombre de p-Sylow de G divise m.
2. Montrer que pour tout $0 \leq i \leq d$, G possède un sous groupe d'ordre p^i.

Exercice 19.

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Exercice 20.

1. Montrer qu'un groupe d'ordre 42 n'est pas simple.
2. Montrer qu'un groupe d'ordre 56 n'est pas simple. (On pourra chercher le nombre d'éléments d'ordre 7.)
3. Montrer qu'un groupe d'ordre 63 n'est pas simple.
4. Montrer qu'un groupe d'ordre 63 est un produit semi-direct.

Exercice 21 (Étude de $\mathfrak{S}_3$)**.**

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_3$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_3$ ayant cette structure, et leur signature. Décrire les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, et ceux qui sont distingués dans $\mathfrak{S}_3$.

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 22 (Étude de $\mathfrak{S}_4$)**.**

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_4$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ ayant cette structure, et leur signature. Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$. En déduire que $\mathfrak{A}_4$ n'est pas un groupe simple, i.e. qu'il possède des sous-groupes distingués autres que $\{e\}$ et $\mathfrak{A}_4$.

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 23.

Combien le groupe $\mathfrak{S}_5$ contient-il de 5-Sylow ?

Exercice 24.

1. Montrer qu'un groupe d'ordre p^3q (avec p premier et q premier avec p) admet un sous-groupe d'ordre p, un d'ordre p^2 et un d'ordre p^3.
2. Donner la liste des éléments du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$. Soit H un sous-groupe d'ordre 3 de $\mathfrak{A}_4$ et σ un élément de $\mathfrak{A}_4$ qui n'est pas dans H. Montrer que le sous-groupe engendré par H et σ est le groupe $\mathfrak{A}_4$. En déduire que $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.