Agrégation

FEUILLE DE TD N°2
GROUPES DE PETIT ORDRE

On notera $\mathbb{H}_8$ le groupe quaternionique, qui admet la présentation
$$< a, b | a^2 = b^2 = (ab)^2, a^4 = 1 > .$$
C'est un groupe d'ordre 8 dont les éléments sont notés
$$\mathbb{H}_8 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$$
On rappelle

Théorème (Classification des groupes abéliens finis)**.** *Soit G un groupe abélien fini non réduit à $\{e_G\}$. Alors, il existe r entiers naturels $(d_i)_{1\leq i\leq r}$ plus grands que 2, tels que pour tout tout $1 \leq i \leq r-1$, d_i divise d_{i+1} tels que*
$$G \equiv \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}.$$
De plus, une telle liste $(d_1, d_2, \cdots, d_r)$ est unique.

Les entiers d_i sont appelés facteurs invariants. En les décomposant en produits de nombres premiers $d_i = \Pi_j p_j^{m_{ij}}$ on définit les diviseurs élémentaires comme les $d_{ij} := p_j^{m_{ij}}$. Le type de G est la liste croissante des diviseurs élémentaires, écrit chacun autant de fois qu'il apparaît dans les différents facteurs invariants.

1. GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ABÉLIENS FINIS

Exercice 1 (Groupes abéliens finis)**.**

Soit G le groupe $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/45\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$.

1. Écrire son type et sa représentation canonique, donnée par le théorème de classification. *On pourra commencer par d_r.*
2. Le groupe G est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/108\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$?

Exercice 2 (Exemples de sous-groupes caractéristiques)**.**

1. Montrer qu'un p-Sylow distingué est caractéristique.
2. Soit H un sous-groupe distingué d'un groupe fini G tel que son ordre est premier avec son indice. Montrer alors que H est le seul sous-groupe d'ordre $|H|$ et donc que H est caractéristique.

Exercice 3 (Produit semi-direct interne)**.**

Soit N un sous-groupe distingué d'un groupe G ($N \lhd G$) et H un sous groupe de G tel que $H \cap N = \{e_G\}$.

1. Montrer que NH est un sous-groupe de G.
2. On suppose désormais que $|G| = |N||H|$. Montrer que $\varphi : N \times H \to G$, $(n, h) \mapsto nh$ est une bijection.
3. Montrer que si on munit $N \times H$ de la loi
$$(n, h) \star (n', h') = (n(hn'h^{-1}), hh'),$$
alors $N \times H$ est un groupe et φ un isomorphisme de groupes.

Exercice 4 (Groupes d'automorphismes)**.**

1. Montrer que les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont obtenus par multiplication par un inversible de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$.
2. Décrire un isomorphisme de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sur $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$.
3. Montrer que si G et H sont deux groupes d'ordre premiers entre eux, alors
$$Aut(G \times H) = Aut(G) \times Aut(H).$$

4. En déduire le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$.
5. Soit p un nombre premier et n un entier naturel non nul. Montrer que
$$Aut((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n) = GL(n, \mathbb{F}_p).$$
6. Montrer que $Aut(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to Bij((1,0),(1,1),(0,1))$ est un isomorphisme.

Exercice 5 (Exemple de produits semi-directs)**.**

1. Montrer que, après avoir fixé un générateur de $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$, la donnée d'un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dans $Aut(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ revient à la donnée d'un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
2. En déduire une structure de produit semi-direct sur $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
3. Montrer que toutes les structures de produit semi-direct donnent des groupes isomorphes. *On pourra montrer que si $\varphi, \psi \in Hom(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, Aut(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ alors il existe $\gamma \in Aut(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ tel que $\psi(h) = \gamma \circ \varphi(h) \circ \gamma^{-1}$.*
4. Montrer que tous les morphismes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sont de la forme $t \mapsto \{x \mapsto k^t x\}$ où k est un élément de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\star$ d'ordre p.

2. Groupes de petit ordre

Exercice 6 (Des petites questions)**.**

1. Soit p un nombre premier. Déterminer à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre p.
2. Soit p un nombre premier. Déterminer à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre p^2.
3. Donner des exemples de groupes d'ordre 6 non abéliens.
4. Déterminer l'ordre des groupes diédraux D_n.
5. Déterminer l'ordre des groupes alternés $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 7 (Groupes d'ordre 6)**.**

Soit G un groupe d'ordre 6.

1. Montrer que G admet un élément τ d'ordre 2 et un élément σ d'ordre 3.
2. Quelles sont les valeurs possibles de $\tau\sigma\tau$?
3. Déterminer, dans chacun des cas précédents, la structure de G à isomorphisme près.

Exercice 8 (Groupes d'ordre pq)**.**

Soit G un groupe d'ordre pq, où p et q sont deux nombres premiers distincts. On suppose que $p < q$.

1. Montrer qu'il n'y a qu'un q-Sylow Q et qu'il est distingué.
2. Montrer que G est produit semi-direct $Q \rtimes P$ où P est un p-Sylow de G.
3. Si p ne divise pas $q-1$, déterminer la structure de G.
4. Si $p = 2$, déterminer le morphisme structurel $\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$. Déterminer alors la structure de G.
5. Si p divise $q-1$, montrer qu'il n'y a qu'un seul produit semi-direct non abélien, à isomorphisme près.

Exercice 9 (Groupe non abélien d'ordre 8)**.**

Soit G un groupe non abélien d'ordre 8.

1. Montrer que G contient un élément d'ordre 4. Soit H le sous-groupe qu'il engendre.
2. Montrer que si $G - H$ contient un élément d'ordre 2, G est un produit semi-direct. Après avoir vérifié que $Aut(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, montrer qu'il existe une unique structure de tel produit semi-direct non abélien.
3. Montrer que si $G - H$ n'a pas d'élement d'ordre 2, on retrouve la table de $\mathbb{H}_8$ en choisissant i l'élément d'ordre 4 qui engendre H et j un élément d'ordre 4 dans $G - H$. *On pourra montrer que i^2 est le seul élément d'ordre 2 est qu'il est donc central. On le notera -1.*