UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Agrégation

FEUILLE DE TD N°3
EXERCICES VARIÉS

1. Groupe de Sylow

Exercice 1 (Groupes de matrices sur $\mathbb{F}_2$)**.**

1. Décrire un 2-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_2)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que le polynôme minimal de A est irréductible de degré 3. En déduire que $GL_3(\mathbb{F}_2) \cap \mathbb{F}_2[A]$ est un 7-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_2)$.
3. Déterminer un 3-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_2)$ à l'aide de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Résolubilité

On rappelle que le groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe G est le groupe sous-groupe engendré par les commutateurs. C'est un sous-groupe caractéristique. On définit par récurrence le $k+1$ième groupe dérivé de G comme le groupe dérivé du $k$ième groupe dérivé $D^k(G)$ de G. On dit qu'un groupe est résoluble, si l'un des ses groupes dérivés est réduit à un élément.

Exercice 2 (Généralités)**.**

1. Montrer que le groupe des matrices triangulaires supérieures de diagonale identité est résoluble.
2. Montrer que si H est un sous-groupe distingué d'un groupe G, alors G est résoluble si et seulement si H et G/H le sont. (On pourra commencer par le cas où G/H est abélien).
3. Montrer qu'un p-groupe est résoluble.

3. Groupes symétriques

Exercice 3 (Groupes symétriques)**.**

Soint n un entier naturel supérieur à 3.

1. Montrer que les permutations $(i,j)(j,k)$ et $(i,j)(k,l)$ s'écrivent comme produit de 3-cycles.
2. En déduire que le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.
3. Montrer que si $n \geq 5$, tous les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 4 (Résolubilité)**.**

1. Montrer que $\mathfrak{S}_3$ est résoluble.
2. Montrer que le groupe D_4 des permutations de profil $(.,.)(.,.)$ est un groupe abélien d'ordre 4 distingué dans A_4. En déduire que $\mathfrak{A}_4$ et donc $\mathfrak{S}_4$ sont résolubles.
3. On suppose désormais $n \geq 3$. Soit c un 3 cycle. En considérant c^2, montrer que c est un commutateur dans $\mathfrak{S}_n$. En déduire le sous groupe dérivé $D(\mathfrak{S}_n)$.
4. Montrer que pour $n \geq 5$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$ ne sont pas résolubles.

4. Groupes linéaires

Exercice 5 (Forme alternée)**.**

Une forme bilinéaire f sur un k-espace vectoriel E est dite alternée, si tout vecteur de E est isotrope. Soit (E, f) un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire alternée.

1. Soit (V, f) un k-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une forme alternée non-dégénérée. Soit x un vecteur non nul. Montrer qu'il existe un vecteur isotrope y tel que $f(x, y) = 1$. On dit alors que (V, f) est un plan symplectique.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $(V, f_{|V})$ est un espace non singulier (i.e. $f_{|V}$ non dégénérée) alors $E = V \oplus^{\perp} V^{\perp}$.
3. Montrer que E est somme directe orthogonale de droites isotropes et de plans symplectiques.
4. Montrer que tous les sous-espaces isotropes maximaux de E ont même dimension. Déterminer cette dimension en fonction de la dimension de E et du rang de f.
5. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Witt symplectique : Soit (E, f) et (E', f') deux k-espaces vectoriels de dimension finie muni d'une forme symplectique (i.e. bilinéaire alternée non-dégénérée). On suppose (E, f) et (E', f') isométriques. Alors, toute isométrie d'un sous-espace de (E, f) sur un sous-espace de (E', f') se prolonge en une isométrie de (E, f) sur (E', f').

Exercice 6 (Groupes linéaires)**.**

Soit E un k-espace vectoriel. Soit f une forme linéaire sur E et a un élément non nul de $H = ker(f)$. On appelle transvection associée à f et a l'application $u : E \to E$, $x \mapsto x + f(x)a$. On rappelle que les transvections de E engendrent $SL(E)$.

1. Soit u une transvection. En considérant une base (e_i) de E avec $e_{n-1} = a$, $(e_j)_{1 \leq j \leq n-1}$ base de H, et e_n tel que $f(e_n) = 1$, écrire la matrice de u.
2. Montrer que si u est une transvection, $Ker(u - Id) = H$, $\det u = 1$, u n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que si $\dim E \geq 3$, les transvections de E sont conjuguées dans $SL(E)$.
4. On suppose k de caractéristique différente de 2 et $\dim E \geq 3$. Montrer que
$$D(GL(E) = D(SL(E)) = SL(E)$$
et donc que ni $GL(E)$, ni $SL(E)$ ne sont résolubles.

Exercice 7 (Sous-groupe fini de $SO(3)$)**.**

1. Montrer le *théorème de Burnside* : soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E. Alors le nombre N d'orbites est la moyenne des cardinaux des points fixes des éléments de G et aussi
$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{card}\, Fix(\varphi(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in E} \text{card}\, stabl(x).$$
On pourra considérer $\{(x, g) \in E \times G / g \cdot x = x\}$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $SO(3)$. On considère son action sur la sphère unité. Soit X l'ensemble des points fixés par un des éléments de G différents de l'identité. Montrer que X est stable par l'action de G. Montrer que le stabilisateur d'un élément de X est un groupe cyclique. On notera N le nombre d'orbites de l'action de G sur X et n_j le cardinal du stabilisateur d'un élément de l'orbite $\mathcal{O}_j$.
3. Montrer que
$$N|G| = 2(|G| - 1) + \text{card}\, X.$$
4. Montrer que
$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{j=1}^{N} (1 - \frac{1}{n_j}).$$
5. En déduire que $N = 2$ ou $N = 3$.
6. Montrer que si $N = 2$, G est un sous-groupe cyclique de rotations.
7. Si $N = 3$, déterminer les possibilités pour les n_j.