UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

PARTIEL (NOVEMBRE 2014)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (Question de cours, 4 points)

Rappeler les quatre propriétés équivalentes qui caractérisent les sous-surfaces différentiables de $\mathbb{R}^3$. Préciser celle qui se généralise pour donner la définition des surfaces différentiables abstraites.

Exercice 2 (Courbure, 6 points)

La courbure moyenne de la surface d'Enneper paramétrée par

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & \begin{pmatrix} u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ v - \frac{v^3}{3} + u^2 v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

est-elle partout nulle ? (On admettra que F est un homéomorphisme sur son image.) Décrire d'abord les étapes de votre démarche. Les résultats intermédiaires seront pris en compte.

Exercice 3 (Intégrale, 5 points)

1 On considère la sphère unité $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\int_{\mathbb{S}} x^2 d\sigma^S$.

2 Montrer à l'aide d'une isométrie que

$$\int_{\mathbb{S}} x^2 d\sigma^S = \int_{\mathbb{S}} y^2 d\sigma^S$$

Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 4 (Extrema, 5 points)

1 Déterminer les extrema de la fonction $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ définie sur l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + 3y^2 + z^2 = 3$.

2 Interpréter géométriquement le résultat précédent.