UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Partiel (Novembre 2014)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (Question de cours, 4 points)

Soit S une sous-surface différentiable de $\mathbb{R}^3$ orientable, I sa première forme fondamentale. Soit N un champs de vecteurs normaux unitaires et W l'application de Weingarten associée. Soit $F : U \to W$ un paramétrage local de S au voisinage d'un point p. On note $X_i := \frac{\partial F}{\partial u_i}(F^{-1}(p))$. Calculer $I(WX_i, X_j)$ en fonction de F, N et du produit scalaire $< \ , \ >$ sur $\mathbb{R}^3_{ev}$.

Exercice 2 (Courbure, 6 points)

Déterminer la courbure de Gauss et la courbure moyenne de l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 + z^2 = 2\}$$

au point de coordonnées $(0, 1, 0)$. Décrire d'abord les étapes de votre démarche. Les résultats intermédiaires seront pris en compte.

Exercice 3 (Paramétrage, 10 points)

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ du repère standard $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Pour tout réel θ on considère les vecteurs

$$\vec{u}_\theta := \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \text{ et } v_\theta := -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}.$$

Soit $a > r > 0$ deux réels strictement positifs.

1 On considère l'application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) & \mapsto & (a + r\cos\phi)\vec{u}_\theta + r\sin\phi\vec{k} \end{array}$$

On notera T_{ar} l'image de F. Montrer que T_{ar} ne rencontre pas l'axe $x = y = 0$. Dessiner l'allure de $T_{3,1}$. Montrer que F est différentiable et déterminer le rang de sa différentielle en tout point de $\mathbb{R}^2$. À quelles conditions $F(\theta, \phi) = F(\theta', \phi')$? Peut-on affirmer que T_{ar} est une sous-surface différentiable de $\mathbb{R}^3$?

2 On considère l'application

$$E : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) \end{array}$$

On admettra que

$$(x, y, z) \in T_{ar} \iff E(x, y, z) = 0.$$

Montrer que T_{ar} est une sous-surface différentiable de $\mathbb{R}^3$. (Indication : on pourra calculer $x\frac{\partial E}{\partial x} + y\frac{\partial E}{\partial y}$.)

3 On note $N(\theta, \phi) = \cos\phi\vec{u}_\theta + \sin\phi\vec{k}$ et on introduit l'application

$$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (t, \theta, \phi) & \mapsto & F(\theta, \phi) + trN(\theta, \phi) \end{array}$$

On fixe un point $(0, \theta_0, \phi_0)$. Montrer que G est un difféomorphisme local au voisinage de $(0, \theta_0, \phi_0)$.

4 On admettra que

$$E(G(t,\theta,\phi)) = t(t+2)r^2[4a(a+r(1+t)\cos\phi) + t(t+2)r^2].$$

Montrer qu'il existe un $\delta > 0$ tel quel G est un difféomorphisme de $]-\delta,\delta[\times]\theta_0-\delta,\theta_0+\delta[\times]\phi_0-\delta,\phi_0+\delta[$ sur un voisinage W de $F(\theta_0,\phi_0)$ dans $\mathbb{R}^3$ et

$$W \cap T_{ar} = G(\{0\}\times]\theta_0-\delta,\theta_0+\delta[\times]\phi_0-\delta,\phi_0+\delta[) = F(]\theta_0-\delta,\theta_0+\delta[\times]\phi_0-\delta,\phi_0+\delta[).$$

En déduire que F est un homéomorphisme local.

5 Montrer que $F :]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[\to T_{ar} - (\{x<0, y=0\} \cup \{x^2+y^2 = (a+r)^2, z=0\})$ est un paramétrage de S.

6 Calculer l'aire de T_{ar}.