Corrigé du partiel (Novembre 2014)

Exercice 2

F a des composantes polynomiales : elle est donc différentiable. On verra que sa différentielle est partout de rang 2. Comme on admet que c'est un homéomorphisme sur son image, F donne des paramétrages locaux.

On pose

$$X_u = \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 - u^2 + v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{pmatrix} \qquad X_v = \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} 2uv \\ 1 - v^2 + u^2 \\ -2v \end{pmatrix}$$

La matrice de la première forme fondamentale dans cette base est

$$^{F}G = \begin{pmatrix} \|X_u\|^2 & \langle X_v, X_u \rangle \\ \langle X_u, X_v \rangle & \|X_v\|^2 \end{pmatrix}$$

Elle est diagonale car $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ et même scalaire car $\|X_u\|^2 = \|X_v\|^2$. Donc $^{F}G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|X_u\|^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|X_u\|^2} \end{pmatrix}$

Soit N un champs de vecteurs normaux unitaires (par exemple donné par $\dfrac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$)

Comme nous cherchons la trace de l'endomorphisme de Weingarten, il suffit de déterminer les éléments diagonaux de la matrice $W = {}^{F}G^{-1}\ H$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ -2 \end{pmatrix}$$

Comme $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ $\qquad \left\langle \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}, N \right\rangle = -\left\langle \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}, N \right\rangle$

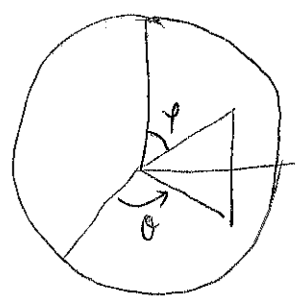
La matrice H a donc des termes diagonaux opposés.
Comme G^{-1} est scalaire, la matrice W a aussi des coefficients diagonaux opposés. Ainsi $\frac{1}{2}\operatorname{trace}(W) = 0 = \mathcal{H}$.

La courbure moyenne de la surface d'Enneper est partout nulle. C'est une surface minimale.

Exercice 3

1- On utilise le paramétrage sphérique de la sphère unité S

$$F : \ ]-\pi, \pi[\times]0, \pi[\longrightarrow S^2$$
$$(\theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$



L'élément d'aire $d\sigma$ s'exprime dans ce paramétrage à l'aide du déterminant (en valeur absolue) de la première forme fondamentale dans la base associée.

$$X_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \sin\theta \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$${}^F G = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d\sigma = \sqrt{|\det {}^F G|}\, d\theta\, d\varphi = \sin\varphi \, d\theta\, d\varphi \qquad \text{car } \sin\varphi \geq 0$$

$$\int_{S^2} x^2 \, d\sigma^S = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (\sin\varphi \cos\theta)^2 \sin\varphi \, d\theta\, d\varphi$$

car la partie omise $S^2 - \operatorname{Im} F$ est de mesure nulle.

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} (\cos\theta)^2 d\theta \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2\varphi \, \sin\varphi \, d\varphi$$

Or $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \pi$

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \int_0^\pi (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi \, d\varphi = \left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^\pi = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Donc $\displaystyle\int_{S^2} x^2 \, d\sigma^S = \frac{4\pi}{3}$

2 – La rotation d'axe (Oz) d'angle $+\frac{\pi}{2}$ transforme x en $-y$.
Comme c'est une isométrie, elle conserve la mesure d'angle

$$r : S^2 \longrightarrow S^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

Donc $\int_{S} x^2 d\sigma^S = \int_{S} y^2 d\sigma^S$

De même $\int_{S} x^2 d\sigma^S = \int_{S} z^2 d\sigma^S$ en utilisant la rotation

d'axe $(0,y)$ d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Donc $\int_{S} x^2 d\sigma^S = \frac{1}{3} \int_{S} (x^2+y^2+z^2) d\sigma^S = \frac{1}{3} \int_{S} 1\, d\sigma^S = \frac{\text{Aire}(S)}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Exercice 4

Remarque simple : Sur l'ellipsoïde d'équation $x^2+3y^2+z^2=3$

la fonction $f(x,y,z)$ se réécrit

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 3-2y^2$

Son maximum 3 est donc atteint pour $y=0$ $x^2+z^2=3$.

Son minimum 1 est atteint pour $|y|$ maximal

donc $|y|=1$ car $3y^2 = 3-x^2-y^2 \leq 3$

Il est donc atteint aux points $(0,1,0)$ et $(0,-1,0)$

Démarche usuelle :

La fonction f est différentiable car polynomiale

Ses extrema sont parmi les points p où la différentielle

de f est nulle sur $T_p\mathcal{E}$, c'est à dire les points

où $\text{grad} f$ // $\text{grad}(x^2+3y^2+z^2)$

$\overrightarrow{grad}\,\varphi = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\qquad$ $grad\,(x^2+3y^2+z^2) = 2\begin{pmatrix}x\\3y\\z\end{pmatrix}$

Soit $(x,y,z)\in\mathcal{E}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}x\\3y\\z\end{pmatrix} \iff \exists\,\lambda\in\mathbb{R} \,/ \quad \begin{array}{l} x=\lambda x\\ y=3\lambda y\\ z=\lambda z\end{array}$$

Pour $\lambda\neq 1$ et $\lambda\neq\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x=0$ $\qquad$ $z=0$ $\qquad$ $y=0$ $\qquad$ impossible

Pour $\lambda=1$ $\qquad$ x et z sont quelconques et $y=0$

on trouve le maximum

$\lambda=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x=0$ $\qquad$ $z=0$ $\qquad$ $3y^2=3$ $\qquad$ $y=\pm 1$

on trouve les deux minima.

2- Il s'agit de φ = distance à l'origine